Министерство образования и науки Российской Федерации

НОВОСИБИРСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ
ТЕХНИЧЕСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ

С. В. СУДОПЛАТОВ, Е. В. ОВЧИННИКОВА

ДИСКРЕТНАЯ МАТЕМАТИКА

УЧЕБНИК

для дистанционного образования

НОВОСИБИРСК
2011

Рецензенты: *А. Г. Пинус* — д-р физ.-мат. наук, проф.;
В. М. Зыбарев — канд. техн.наук, доц.

Сергей Владимирович Судоплатов
Елена Викторовна Овчинникова

Дискретная математика

В книге излагаются основы теории множеств, алгебраических систем, теории графов и алгебры логики, которые образуют курс дискретной математики.

Книга предназначена для студентов технических вузов, изучающих дискретную математику в рамках дистанционного образования.

Оглавление

ПРЕДИСЛОВИЕ

Книга предназначена для студентов младших курсов технических вузов, изучающих дискретную математику дистанционно, и написана на основе учебника *Судоплатов С. В., Овчинникова Е. В.* Дискретная математика: Учебник — М.:ИНФРА-М, Новосибирск: Изд-во НГТУ, 2005, доступного через библиотеку НГТУ, киоск НГТУ или Интернет-магазины России.

Материал учебника составлен в соответствии с рабочими программами курсов дискретной математики, читаемых в НГТУ.

Учебник включает четыре раздела: элементы теории множеств, алгебраические системы, теория графов, алгебра логики. В конце книги приведены варианты контрольной работы.

Вариант N контрольной работы студента вычисляется по формуле $N = k + 25 \cdot m$, где k — число, состоящее из последних двух цифр личного шифра студента, а целое число m выбирается так, чтобы значение N находилось в пределах от 1 до 25.

Перед решением задач контрольной работы полезно прорешать задачи и упражнения, помещенные в конце соответствующих разделов. В конце каждой главы помещены ссылки на примеры, которые являются аналогами соответствующих задач контрольной работы.

Знак $\Box$, используемый в тексте, означает конец рассуждения или его отсутствие. Знак $\rightleftharpoons$ читается “положим по определению”, “обозначим” или “имеет вид”, знак $\Leftrightarrow$ — “тогда и только тогда”, знак $\Rightarrow$ — “если ..., то ...”, знак $\forall$ — “для любо о”, знак $\exists$ — “существует”.

Г л а в а 1

ЭЛЕМЕНТЫ ТЕОРИИ МНОЖЕСТВ

§ 1.1. Множества и основные операции над ними

Понятия множества и элемента множества относятся к понятиям, не определимым явно, таким, как, например, точка и прямая. Это связано с тем, что некоторые понятия в математике должны быть исходными, служить теми "кирпичиками", из которых складывается общая теория. Мы определяем только, как соотносятся эти исходные понятия, не говоря о природе рассматриваемых объектов.

Под *множеством* M понимается совокупность некоторых объектов, которые будут называться *элементами* множества M. Тот факт, что x является элементом множества M, будем обозначать через $x \in M$ (читается "x принадлежит M"), а если x не является элементом множества M, то будем писать $x \notin M$ (читается "x не принадлежит M").

Заметим, что элементы множества сами могут являться множествами. Например, множество групп студентов состоит из элементов (групп), которые, в свою очередь, состоят из студентов.

Множество можно задать перечислением принадлежащих ему элементов или указанием свойств, которым элементы множества должны удовлетворять. Если $x_1, x_2, \ldots, x_n$ — все элементы множества M, то будем писать $M = \{x_1, x_2, \ldots, x_n\}$. Пусть имеется свойство P, которым могут обладать или не обладать элементы некоторого множества A. Тогда множество M, состоящее из всех элементов множества A, обладающих свойством P, будет обозначаться через $\{x \in A \mid x$ обладает свойством $P\}$, а также $\{x \mid x$ обладает свойством $P\}$, $\{x \mid P(x)\}$ или $\{x\}_{P(x)}$, когда из контекста ясно, о каком множестве A идет речь.

Мы будем использовать следующие обозначения для числовых множеств: $\mathbb{N}$ или ω — множество натуральных чисел, $\mathbb{Z}$ — множество целых чисел, $\mathbb{Q}$ — множество рациональных чисел, $\mathbb{R}$ — множество вещественных чисел, $\mathbb{C}$ — множество комплексных чисел.

П р и м е р 1.1.1. Множество M арабских цифр можно задать двояко: перечислением $M = \{0, 1, 2, \ldots, 9\}$ или посредством свойства $M = \{x \mid x$ — арабская цифра$\}$.

П р и м е р 1.1.2. Множество нечетных чисел $\{\pm 1,\ \pm 3,\ \pm 5,\ \ldots\}$ можно определить как $\{x \mid x = 2k + 1$ для некоторого $k \in \mathbb{Z}\}$.

Множество A называется *подмножеством* множества B (обозначается $A \subseteq B$), если все элементы множества A принадлежат B:

$$A \subseteq B \Leftrightarrow \forall x(x \in A \Rightarrow x \in B).$$

Другими словами, это означает справедливость следующего утверждения: для любого элемента x, если $x \in A$, то $x \in B$. Если $A \subseteq B$, то будем также говорить, что *множество A содержится в B*, или имеется *включение множества A в B*. Множества A и B называются *равными* или *совпадающими* (обозначается $A = B$), если они состоят из одних и тех же элементов, т. е. если $A \subseteq B$ и $B \subseteq A$. Таким образом, чтобы доказать равенство множеств, требуется установить два включения.

П р и м е р 1.1.3. Справедливы следующие включения: $\mathbb{N} \subseteq \mathbb{Z}$, $\mathbb{Z} \subseteq \mathbb{Q}$, $\mathbb{Q} \subseteq \mathbb{R}$, $\mathbb{R} \subseteq \mathbb{C}$.

П р и м е р 1.1.4. Покажем, что множества $M_1 \rightleftharpoons \{x \mid \sin x = 1\}$ и $M_2 \rightleftharpoons \{x \mid x = \frac{\pi}{2} + 2k\pi, k \in \mathbb{Z}\}$ совпадают.

Если $x \in M_1$, то x является решением уравнения $\sin x = 1$. Но это значит, что x можно представить в виде $x = \frac{\pi}{2} + 2k\pi$ и поэтому $x \in M_2$. Таким образом, $M_1 \subseteq M_2$. Если же $x \in M_2$, т. е. $x = \frac{\pi}{2} + 2k\pi$, то $\sin x = 1$, т. е. $M_2 \subseteq M_1$. Следовательно, $M_1 = M_2$. $\square$

Запись $A \subset B$ или $A \subsetneq B$ означает, что $A \subseteq B$ и $A \neq B$ (A не равно B), и в этом случае будем говорить, что A *строго включено* в B, или является *собственным подмножеством* B. Так, включения из примера 1.1.3 являются строгими.

Заметим, что $X \subseteq X$; если $X \subseteq Y$ и $Y \subseteq Z$, то $X \subseteq Z$; если $X \subseteq Y$ и $Y \subseteq X$, то $X = Y$.

Не следует смешивать отношение принадлежности $\in$ и отношение включения $\subseteq$. Хотя $0 \in \{0\}$ и $\{0\} \in \{\{0\}\}$, неверно, что $0 \in \{\{0\}\}$, поскольку единственным элементом множества $\{\{0\}\}$ является $\{0\}$.

Совокупность всех подмножеств множества A называется его *булеаном* или *множеством-степенью* и обозначается через $\mathcal{P}(A)$ или 2^A. Таким образом, $\mathcal{P}(A) \rightleftharpoons \{B | B \subseteq A\}$.

Мы будем предполагать, что существует множество, не содержащее ни одного элемента, которое называется *пустым* и обозначается через $\varnothing$. Ясно, что $\varnothing \subseteq A$ для любого множества A.

П р и м е р 1.1.5. Если $A = \{1, 2, 3\}$, то $\mathcal{P}(A) = \{\varnothing, \{1\}, \{2\}, \{3\}, \{1, 2\}, \{1, 3\}, \{2, 3\}, A\}$.

Множество, содержащее все элементы, находящиеся в рассмотрении, называется *универсальным* или *универсумом* и обозначается через U. Рассмотрим операции на булеане $\mathcal{P}(U)$. Если $A, B \in \mathcal{P}(U)$, то *пересечение* $A \cap B$ и *объединение* $A \cup B$ множеств A и B определяются равенствами $A \cap B \rightleftharpoons \{x \mid x \in A \text{ и } x \in B\}$, $A \cup B \rightleftharpoons \{x \mid x \in A \text{ или } x \in B\}$. Пересечение множеств A и B называется также их *произведением* и обозначается $A \cdot B$, а объединение — *суммой*: $A + B$. Множество $A \setminus B \rightleftharpoons A - B \rightleftharpoons \{x | x \in A \text{ и } x \notin B\}$ называется *разностью* множеств A и B, множество $A \oplus B \rightleftharpoons A \dot{-} B \rightleftharpoons (A \setminus B) \cup (B \setminus A)$ — *кольцевой суммой* или *симметрической разностью* множеств A и B, а множество $\overline{A} \rightleftharpoons U \setminus A$ — *дополнением* множества A в U (см. рис. 1.1, на котором изображены так называемые *диаграммы Эйлера—Венна*, наглядно поясняющие соотношения между множествами).

П р и м е р 1.1.6. Докажем, что $A \setminus B = A \cap \overline{B}$.

Сначала установим, что $A \setminus B \subseteq A \cap \overline{B}$. Пусть x — произвольный элемент $A \setminus B$. Тогда по определению разности множеств имеем $x \in A$ и $x \notin B$, отсюда $x \in A$ и $x \in \overline{B}$, значит, $x \in A \cap \overline{B}$. Теперь покажем, что $A \cap \overline{B} \subseteq A \setminus B$. Если $x \in A \cap \overline{B}$, то $x \in A$ и $x \in \overline{B}$, поэтому $x \in A$ и $x \notin B$, значит, $x \in A \setminus B$. На основании включений $A \setminus B \subseteq A \cap \overline{B}$ и $A \cap \overline{B} \subseteq A \setminus B$ делаем вывод, что $A \setminus B = A \cap \overline{B}$. □

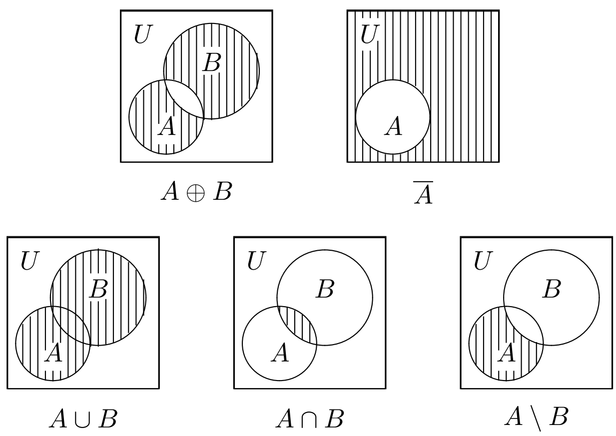


Рис. 1.1

Аналогично примеру 1.1.6 устанавливаются следующие основные свойства операций пересечения, объединения и дополнения:

1. *Ассоциативность* операций $\cup$ и $\cap$:
$$A \cup (B \cup C) = (A \cup B) \cup C,\ A \cap (B \cap C) = (A \cap B) \cap C.$$
2. *Коммутативность* операций $\cup$ и $\cap$:
$$A \cup B = B \cup A,\ A \cap B = B \cap A.$$
3. *Законы идемпотентности*
$$A \cup A = A,\ A \cap A = A.$$
4. *Законы дистрибутивности*
$$A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C),$$
$$A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C).$$
5. *Законы поглощения*
$$A \cup (A \cap B) = A,\ A \cap (A \cup B) = A.$$
6. *Законы де Моргана*
$$\overline{A \cup B} = \overline{A} \cap \overline{B},\ \overline{A \cap B} = \overline{A} \cup \overline{B}.$$
7. *Законы нуля и единицы*: положим $0 \rightleftharpoons \varnothing$, $1 \rightleftharpoons U$, тогда
$$A \cup 0 = A,\ A \cap 0 = 0,\ A \cup 1 = 1,\ A \cap 1 = A,$$
$$A \cup \overline{A} = 1,\ A \cap \overline{A} = 0.$$
8. *Закон двойного отрицания*
$$\overline{\overline{A}} = A.$$

Отметим, что на основании примера 1.1.6 операция $\setminus$ выражается через операции $\cap$ и $\bar{}$. По закону де Моргана и закону двойного отрицания справедливо соотношение $A \cup B = \overline{\overline{A} \cap \overline{B}}$, т. е. операция $\cup$ также выражается через операции $\cap$ и $\bar{}$. По определению операция $\oplus$ тоже выражается через $\cap$ и $\bar{}$. Таким образом, любая из определенных операций над множествами выражается через операции $\cap$ и $\bar{}$.

Пересечение и объединение могут быть определены для любого множества множеств A_i, где индексы i пробегают множество I. Пересечение $\cap\{A_i \mid i \in I\}$ и объединение $\cup\{A_i \mid i \in I\}$ задаются равенствами

$$\cap\{A_i \mid i \in I\} \rightleftharpoons \{x \mid x \in A_i \text{ для всех } i \in I\},$$

$$\cup\{A_i \mid i \in I\} \rightleftharpoons \{x \mid x \in A_i \text{ для некоторого } i \in I\}.$$

Вместо $\cap\{A_i \mid i \in I\}$ и $\cup\{A_i \mid i \in I\}$ часто пишут соответственно $\bigcap\limits_{i\in I} A_i$ и $\bigcup\limits_{i\in I} A_i$, а иногда просто $\cap A_i$, $\cup A_i$, если из контекста ясно, какое множество I имеется в виду. Если $I = \{1, 2, \ldots, n\}$, то используются записи $A_1 \cap A_2 \cap \ldots \cap A_n$ и $A_1 \cup A_2 \cup \ldots \cup A_n$, а также $\bigcap\limits_{i=1}^{n} A_i$ и $\bigcup\limits_{i=1}^{n} A_i$.

Множество $\{A_i \mid i \in I\}$ непустых подмножеств множества A называется *покрытием множества* A, если $A = \bigcup\limits_{i\in I} A_i$. Покрытие называется *разбиением*, если $A_i \cap A_j = \varnothing$ при $i \neq j$. Другими словами, множество $\{A_i \mid i \in I\}$ непустых подмножеств множества A является его разбиением, если каждый элемент $x \in A$ принадлежит в точности одному из подмножеств A_i, каждое из которых не является пустым.

Предложение 1.1.1. *Следующие условия эквивалентны:*

1) $A \subseteq B$; 2) $A \cap B = A$; 3) $A \cup B = B$; 4) $A \setminus B = \varnothing$; 5) $\overline{A} \cup B = U$.

Доказательство. $1 \Rightarrow 2$. Так как $A \cap B \subseteq A$, то достаточно показать, что $A \subseteq B$ влечет $A \subseteq A \cap B$. Но если $x \in A$, то по условию $x \in B$, и, следовательно, $x \in A \cap B$.

$2 \Rightarrow 3$. Так как $A \cap B = A$, то $A \cup B = (A \cap B) \cup B$. По закону поглощения и закону коммутативности имеем $A \cup B = B$.

$3 \Rightarrow 4$. Предположим, что $A \cup B = B$. Так как $A \setminus B = A \cap \overline{B}$, то по закону де Моргана, закону ассоциативности, закону коммутативности и законам нуля и единицы имеем $A \setminus B = A \cap \overline{(A \cup B)} = A \cap (\overline{A} \cap \overline{B}) = (A \cap \overline{A}) \cap \overline{B} = 0 \cap \overline{B} = \varnothing$.

$4 \Rightarrow 5$. Предположим, что $A \setminus B = \varnothing$, т. е. $A \cap \overline{B} = \varnothing$. Тогда $\overline{A \cap \overline{B}} = \overline{0} = 1$. По закону де Моргана и закону двойного отрицания получаем $U = 1 = \overline{A \cap \overline{B}} = \overline{A} \cup \overline{\overline{B}} = \overline{A} \cup B$.

$5 \Rightarrow 1$. Предположим, что $\overline{A} \cup B = U$ и не выполняется условие $A \subseteq B$, т. е. найдется элемент x такой, что $x \in A$ и $x \notin B$. Тогда $x \notin \overline{A}$ и, значит, $x \notin \overline{A} \cup B$, а это противоречит равенству $\overline{A} \cup B = U$. $\square$

Упорядоченную последовательность из n элементов $x_1, x_2, \ldots, x_n$ будем обозначать через $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ или $\langle x_1, x_2, \ldots, x_n \rangle$. Здесь круглые или угловые скобки используются для того, чтобы указать на порядок, в котором записаны элементы. Будем называть такую последовательность *упорядоченным набором длины* n, *кортежем* длины n

или просто *n-кой.* Элемент x_i называется i-й *координатой* кортежа $\langle x_1, x_2, \ldots, x_n\rangle$. В теории множеств кортежи кодируются с помощью операции взятия множества по двум элементам в соответствии со следующими правилами: $\langle\ \rangle \rightleftharpoons \varnothing$, $\langle x_1\rangle \rightleftharpoons x_1$, $\langle x_1, x_2\rangle \rightleftharpoons \{\{x_1\}, \{x_1, x_2\}\}$, $\langle x_1, x_2 \ldots, x_{n+1}\rangle \rightleftharpoons \langle\langle x_1, x_2 \ldots, x_n\rangle, x_{n+1}\rangle$.

Заметим, что две n-ки $\overline{x} = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$ и $\overline{y} = (y_1, y_2, \ldots, y_n)$ равны $(\overline{x} = \overline{y})$ тогда и только тогда, когда $x_1 = y_1$, $x_2 = y_2$, …, $x_n = y_n$.

П р и м е р 1.1.7. Пары $(1, 2)$ и $(2, 1)$ не совпадают, хотя множества $\{1, 2\}$ и $\{2, 1\}$ равны. □

Декартовым (прямым) произведением множеств A_1, A_2, …, A_n называется множество $\{(x_1, x_2, \ldots, x_n) \mid x_1 \in A_1,\ x_2 \in \in A_2, \ldots, x_n \in A_n\}$, обозначаемое через $A_1 \times A_2 \times \cdots \times A_n$ или $\prod\limits_{i=1}^{n} A_i$. Если $A_1 = A_2 = \ldots = A_n = A$, то множество $A_1 \times A_2 \times \times \ldots \times A_n$ называется n-й *декартовой степенью множества* A и обозначается через A^n. Положим по определению $A^0 \rightleftharpoons \{\varnothing\}$.

П р и м е р 1.1.8. Для множеств $A = \{1, 2\}$ и $B = \{3, 4\}$ имеем $A \times B = \{(1,3),\ (1,4),\ (2,3),\ (2,4)\}$, $B \times A = \{(3,1),\ (3,2),\ (4,1),\ (4,2)\}$, $A \times A = \{(1,1),\ (1,2),\ (2,1),\ (2,2)\}$.

П р и м е р 1.1.9. (шахматная доска). Рассмотрим два множества $A = \{a, b, c, d, e, f, g, h\}$ и $B = \{1,\ 2,\ 3,\ 4,\ 5,\ 6,\ 7,\ 8\}$. Тогда множеству пар $(x, y) \in A \times B$ соответствует множество клеток шахматной доски.

П р и м е р 1.1.10. Множество $[0, 1]^2$ равно множеству $\{(a, b)|\ 0 \leqslant \leqslant a \leqslant 1, 0 \leqslant b \leqslant 1\}$, которому соответствует множество точек на плоскости, имеющих неотрицательные координаты, не превосходящие единицы (рис. 1.2).

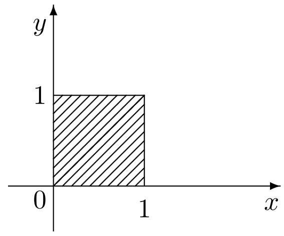


Рис. 1.2

§ 1.2. Отношения. Функции. Взаимно однозначные соответствия

Часто при решении задач необходимо выбирать элементы, связанные некоторым соотношением. Примерами таких связей между элементами могут служить функциональные зависимости или отношение “меньше либо равно”.

n-Местным отношением или *n-местным предикатом* P на множествах $A_1, A_2, \ldots, A_n$ называется любое подмножество прямого произведения $A_1 \times A_2 \times \ldots \times A_n$. Другими словами, элемен-

ты $x_1, x_2, \ldots, x_n$ (где $x_1 \in A_1, \ldots, x_n \in A_n$) связаны соотношением P (обозначается $P(x_1, x_2, \ldots, x_n)$) тогда и только тогда, когда $(x_1, x_2, \ldots, x_n) \in P$.

При $n = 1$ отношение P является подмножеством множества A_1 и называется *унарным* отношением или *свойством*.

Наиболее часто встречаются двухместные отношения ($n = 2$). В этом случае они называются *бинарными* отношениями или *соответствиями*. Таким образом, соответствием P между множествами A и B является подмножество множества $A \times B$. Если $P \subseteq A \times B$ и $(x, y) \in P$, то пишут также $x\,P\,y$.

Отношение $P \subseteq A^n$ называется *n-местным отношением* (*предикатом*) *на множестве* A.

П р и м е р 1.2.1. Если $A = \{2, 3, 4, 5, 6, 7, 8\}$, то бинарное отношение $P = \{(x, y) \mid x, y \in A,\ x$ делит y и $x \leqslant 3\}$ можно записать в виде $P = \{(2, 2),\ (2, 4),\ (2, 6),\ (2, 8),\ (3, 3),\ (3, 6)\}$.

П р и м е р 1.2.2. Рассмотрим отношение $P = \{(x, y) \mid x, y \in \mathbb{R}, x \leqslant y\}$ на множестве $\mathbb{R}$. Тогда запись $x\,P\,y$ означает, что $x \leqslant y$, и в качестве имени (обозначения) этого отношения можно взять сам символ $\leqslant$.

П р и м е р 1.2.3 (ход ладьи). Рассмотрим множество шахматных клеток $S = A \times B$ из примера 1.1.9. Определим бинарное отношение C на множестве S по следующему правилу: $(c_1, c_2) \in C$ тогда и только тогда, когда $c_1, c_2 \in S$ и ладья может пройти с клетки c_1 на клетку c_2 одним ходом на пустой доске (напомним, что ладья за один ход может изменить либо горизонтальную координату, либо вертикальную, но не обе координаты одновременно). Нетрудно заметить, что $C = \{(c_1, c_2) \mid c_1 = (s_1, t_1), c_2 = (s_2, t_2), s_1, s_2 \in A, t_1, t_2 \in B$, и $(s_1 = s_2$ и $t_1 \neq t_2)$ или $(s_1 \neq s_2$ и $t_1 = t_2)\}$. $\square$

Бинарные отношения $P \subseteq A \times B$ иногда удобно изображать графически. Рассмотрим два таких представления. Начертим пару взаимно перпендикулярных осей (Ox — горизонтальная ось, Oy — вертикальная ось), на каждой оси отметим точки, представляющие элементы множеств A и B соответственно. Отметив на плоскости точки с координатами (x, y) такие, что $(x, y) \in P$, получаем множество, соответствующее отношению P. На рис. 1.3 показано множество точек, соответствующих отношению из примера 1.2.1.

Другой способ состоит в том, что элементы $x \in A$ и $y \in B$, связанные отношением P, соединяются стрелками.

П р и м е р 1.2.4. На рис. 1.4 графически показано отношение $P_1 = \{(a, 2), (b, 1), (c, 2)\}$ между множествами $A = \{a, b, c\}$ и $B = \{1, 2, 3\}$, а также отношение $P_2 = \{(a,b),(b,b),\,(c,a)\}$ на множестве A. $\square$

Для любого множества A определим *тождественное отношение* $\mathrm{id}_A \rightleftharpoons \{(x,x) \mid x \in A\}$ и *универсальное отношение* $U_A \rightleftharpoons A^2$. Отношение id_A называется также *диагональю*, а U_A — *полным отношением*.

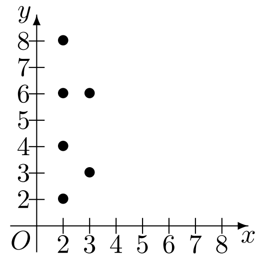


Рис. 1.3

Пусть P — некоторое бинарное отношение. *Областью определения* отношения P называется множество

$$\delta_P \rightleftharpoons \{x \mid (x,y) \in P \text{ для некоторого } y\},$$

областью значений отношения P — множество

$$\rho_P \rightleftharpoons \{y \mid (x,y) \in P \text{ для некоторого } x\}.$$

Обратным к P отношением называется множество

$$P^{-1} \rightleftharpoons \{(y,x) \mid (x,y) \in P\}.$$

Образом множества X относительно предиката P называется множество

$$P(X) \rightleftharpoons \{y \mid (x,y) \in P \text{ для некоторого } x \in X\},$$

прообразом множества X относительно P — множество $P^{-1}(X)$ или, другими словами, образ множества X относительно предиката P^{-1}.

П р и м е р 1.2.5. Для отношения P из примера 1.2.1 и множества $X = \{3\}$ имеем $\delta_P = \{2,3\}$, $\rho_P = \{2,3,4,6,8\}$, $P^{-1} = \{(2,2),(4,2),(6,2),(8,2),(3,3),(6,3)\}$, $P(X) = \{3,6\}$, $P^{-1}(X) = \{3\}$. $\square$

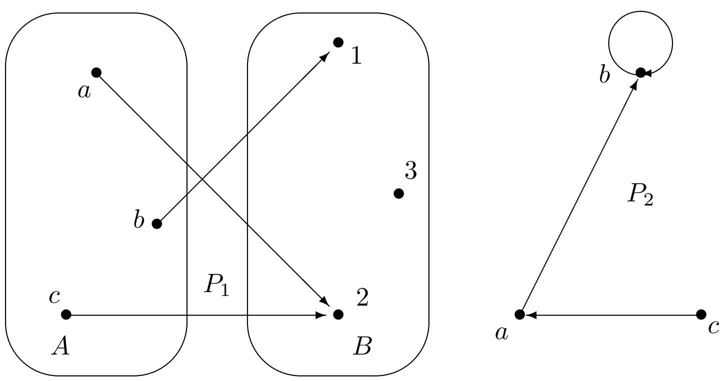


Рис. 1.4

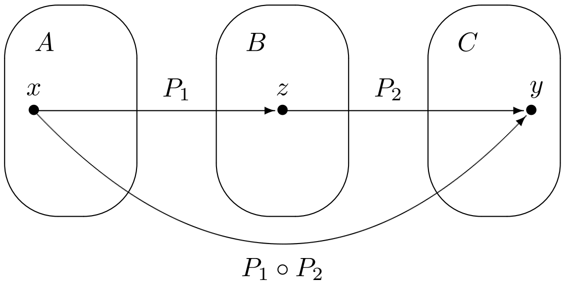


Рис. 1.5

Произведением бинарных отношений $P_1 \subseteq A \times B$ и $P_2 \subseteq B \times C$ или *композицией* P_1 и P_2 называется множество $P_1 \circ P_2 = \{(x, y) \mid x \in A, y \in C$, и найдется элемент $z \in B$ такой, что $(x, z) \in P_1$ и $(z, y) \in P_2\}$ (рис. 1.5). В дальнейшем произведение $P_1 \circ P_2$ будем также обозначать через P_1P_2.

Предложение 1.2.1. *Для любых бинарных отношений P, Q, R выполняются следующие свойства:*
1) $(P^{-1})^{-1} = P$;
2) $(P \circ Q)^{-1} = Q^{-1} \circ P^{-1}$;
3) $(P \circ Q) \circ R = P \circ (Q \circ R)$ (*ассоциативность композиции*). $\square$

Ассоциативность композиции позволяет обозначать композицию $(P \circ Q) \circ R = P \circ (Q \circ R)$ через PQR. По этой же причине однозначно определена композиция $P_1P_2 \ldots P_n$ двухместных предикатов $P_1, P_2, \ldots, P_n$. Отметим, что существуют предикаты P и Q, для которых не выполняется закон коммутативности $P \circ Q = Q \circ P$ (приведите примеры таких предикатов).

Отношение $f \subseteq A \times B$ называется *функцией* или *отображением* из множества A в множество B, если $\delta_f = A$, $\rho_f \subseteq B$ и из $(x, y_1) \in f$, $(x, y_2) \in f$ следует $y_1 = y_2$. Если вместо $\delta_f = A$ выполняется $\delta_f \subseteq A$, то f называется *частичной функцией*. Функция f из A в B обозначается через $f : A \to B$ или $A \xrightarrow{f} B$. Если $(x, y) \in f$, то пишем $y = f(x)$ (y — *значение функции* f при значении *аргумента* x) или $f : x \mapsto y$ (функция f *ставит в соответствие* элементу x элемент y).

П р и м е р 1.2.6. Отношение $\{(1, 2), (2, 3), (3, 2)\} \subseteq \{1, 2, 3\}^2$ — функция, отношение $\{(1, 2), (1, 3), (2, 3)\}$ не является функцией, а отношение $\{(x, x^2 - 2x + 3) \mid x \in \mathbb{R}\}$ — функция, которая обычно обозначается через $y = x^2 - 2x + 3$.

Тождественное отношение $\mathrm{id}_A = \{(x, x) \mid x \in A\}$ является функцией $\mathrm{id}_A : A \to A$, для которой $\mathrm{id}_A(x) = x$ при всех $x \in A$. Другими примерами функций являются *проекции* $\pi_1^{A,B} : A\times \times B \to A$ и $\pi_2^{A,B} : A \times B \to B$, которые задаются по следующим правилам: $\pi_1^{A,B}((a,b)) \rightleftharpoons a$, $\pi_2^{A,B}((a,b)) \rightleftharpoons b$. $\square$

Функция f называется *разнозначной*, *инъективной* (*инъекцией*) или 1-1-функцией, если отношение f^{-1} является частичной функцией, т. е. для любых элементов $x_1, x_2 \in \delta_f$ из $x_1 \neq x_2$ следует $f(x_1) \neq f(x_2)$. Если f — инъекция, то будем писать $f : A \xrightarrow{1-1} B$.

Функция $f : A \to B$ называется функцией A *на* B или *сюръективной* функцией (*сюръекцией*), если $\rho_f = B$. Если f — сюръекция, то будем писать $f : A \xrightarrow{\text{на}} B$.

Функция f называется *взаимно однозначным соответствием* между множествами A и B или *биективной* функцией (*биекцией*), если f — разнозначное отображение A на B. Таким образом, функция является биекцией, если она инъективна и сюръективна. Если f — биекция между A и B, то будем писать $f : A \leftrightarrow B$. Биекция $f : A \leftrightarrow A$ называется *подстановкой множества* A. Простейшим примером подстановки является функция id_A.

П р и м е р 1.2.7. На рис. 1.6 графически показаны функции $f_i : [0,1] \to [0,1]$, $i \in \{1,2,3,4\}$. Функция f_1 сюръективна, но не инъективна, функция f_2 инъективна, но не сюръективна, функция f_3 биективна и является подстановкой, а функция f_4 не инъективна и не сюръективна.

П р и м е р 1.2.8. Рассмотрим три функции $f_i : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $i = 1,2,3$:

1) функция $f_1(x) = \mathrm{e}^x$ инъективна, но не сюръективна;

2) функция $f_2(x) = x \cdot \sin x$ сюръективна, но не инъективна;

3) функция $f_3(x) = 2x - 1$ биективна.

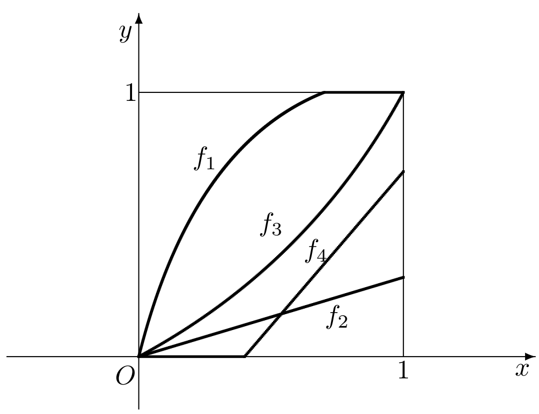


Рис. 1.6

П р и м е р 1.2.9. Биекцией между множеством натуральных чисел $\mathbb{N} = \{0, 1, 2, \ldots\}$ и множеством целых чисел $\mathbb{Z} = \{0, \pm 1, \pm 2, \ldots\}$ является функция $f : \mathbb{N} \to \mathbb{Z}$, для которой

$$f(n) = \begin{cases} m, & \text{если } n = 2m - 1, \\ -m, & \text{если } n = 2m. \end{cases}$$

Предложение 1.2.2. 1. *Если $f : A \to B$ и $g : B \to C$, то $f \circ g : A \to C$.*

2. *Если $f : A \to B$, то $\mathrm{id}_A \circ f = f$, $f \circ \mathrm{id}_B = f$.*

3. *Если $f : A \xrightarrow{\text{на}} B$, $g : B \xrightarrow{\text{на}} C$, то $f \circ g : A \xrightarrow{\text{на}} B$.*

4. *Если f и g — разнозначные отображения, то $f \circ g$ — разнозначное отображение.*

5. *Если $: A \leftrightarrow B$, $g : B \leftrightarrow C$, то $f \circ g : A \leftrightarrow C$.*

6. *Если $f : A \leftrightarrow B$, то $f^{-1} : B \leftrightarrow A$, $f \circ f^{-1} = \mathrm{id}_A$, $f^{-1} \circ f = \mathrm{id}_B$.* $\square$

Если f — отображение и $X \subseteq \delta_f$, то множество $\{f(x) | x \in \in X\}$ называется *образом множества X при отображении f* и обозначается через $f(X)$, а отображение $f \cap (X \times \rho_f)$ называется *ограничением f на X* и обозначается через $f|_X$ или $f \upharpoonright X$.

Функция $f : \mathbb{N} \to B$ называется *последовательностью*. Ее можно представить в виде $f(0), f(1), f(2), \ldots, f(n), \ldots$ или $b_0, b_1, \ldots, b_n, \ldots$, где $b_n = f(n)$, $n \in \mathbb{N}$.

Множество всех функций из A в B обозначается через B^A:

$$B^A \rightleftharpoons \{f | f : A \to B\}.$$

Функция $f : A^n \to B$ называется *n-местной* функцией из A в B. Если y — значение n-местной функции f при значении аргумента $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$, то пишем $y = f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$. Функция $f : A^n \to A$ называется *n-местной алгебраической операцией* на множестве A. При $n = 1$ операция f называется *унарной*, при $n = 2$ — *бинарной*, а в общем случае — *n-арной*. При $n = 0$ операция $f : A^0 \to A$ есть множество $\{(\varnothing, a)\}$ для некоторого $a \in A$. Часто 0-местную операцию $\{(\varnothing, a)\}$ на A будем называть *константой* на A и отождествлять с элементом a.

П р и м е р 1.2.10. Операция сложения вещественных чисел является двухместной, т. е. бинарной операцией $+ : \mathbb{R}^2 \to \to \mathbb{R}$, которая паре чисел (a, b) ставит в соответствие число $a + b$ по обычному правилу: $+(a, b) = a + b$. Любой выделенный элемент множества $\mathbb{R}$, например $\sqrt{2}$, является 0-местной операцией, т. е. константой на $\mathbb{R}$. $\square$

§ 1.3. Натуральные числа. Принцип математической индукции

Рассмотрим два подхода к заданию множества натуральных чисел. Первый подход — конструктивный — позволяет представлять натуральные числа в виде объектов, построенных из пустого множества. Второй подход — аксиоматический. Согласно этому подходу натуральные числа образуют множество, удовлетворяющее некоторому набору свойств (аксиом), и при этом природа элементов множества не важна. Таким образом, с одной стороны, указывается множество натуральных чисел, а с другой стороны — все существенные (определяющие) свойства этого множества.

Положим по определению $0 \rightleftharpoons \varnothing$, $1 \rightleftharpoons \{0\}$ (т. е. $1 = \{\varnothing\}$), $2 \rightleftharpoons \{0,1\}$ (т. е. $2 = \{\varnothing, \{\varnothing\}\}$), …, $n \rightleftharpoons \{0, 1, \ldots, n-1\}$, … Множества, обозначаемые $0, 1, 2, \ldots, n, \ldots$, называются *натуральными числами*. Объединив эти множества, получаем *множество* всех *натуральных чисел* $\{0, 1, 2, \ldots, n, \ldots\}$, обозначаемое через ω.

В силу обозначений предыдущего параграфа, если $A = n = \{0, 1, \ldots, n-1\}$, $B = 2 = \{0, 1\}$, то

$$2^n = B^A = \{f | f : n \to \{0, 1\}\}.$$

Обозначение B^A согласуется с тем, что в множестве B^A имеется ровно 2^n функций. Действительно, поскольку функция f на каждом аргументе $i \in n$ может принимать одно из двух значений 0 или 1 и таких элементов i ровно n, то всего имеется $2 \cdot 2 \cdot \ldots \cdot 2 = 2^n$ различных функций.

Аналогично имеем $2^\omega = \{f \mid f : \omega \to \{0, 1\}\}$ — множество, состоящее из всех последовательностей нулей и единиц.

Как уже отмечалось, второй подход к определению множества натуральных чисел является аксиоматическим. Мы рассмотрим *аксиоматику Дедекинда—Пеано*.

Пусть имеется некоторое множество N, в котором выбран элемент, обозначаемый через 0, и функция, которая произвольному элементу $n \in N$ ставит в соответствие элемент $n' \in N$, называемый *непосредственно следующим* (элемент n' играет роль числа $n + 1$). Таким образом, с помощью функции $n \mapsto n'$ можно однозначно найти элементы $0', 0'', 0'''$ и т. д. (элемент $0^{(n)}$ играет роль числа n). Множество N называется *множеством натуральных чисел*, если система $\mathbb{N} \rightleftharpoons \langle N; 0, {}' \rangle$ удовлетворяет следующим аксиомам:

1) для любого $m \neq 0$ найдется $n \in N$ такой, что $n' = m$;

2) для любых $m, n \in N$, если $m' = n'$, то $m = n$;

3) $n' \neq 0$ для любого $n \in N$;

4) (*аксиома математической индукции*) для любого свойства P (унарного отношения на множестве N), если P выполняется на элементе 0 (т. е. 0 обладает свойством P), и для любого $n \in N$ из выполнимости P на элементе n следует выполнимость P на элементе n', то свойство P выполняется на любом элементе $n \in N$.

Последняя аксиома является наиболее содержательной, она символически записывается следующим образом:

$$\forall P\Big((P(0), \forall n(P(n) \Rightarrow P(n')) \Rightarrow \forall n P(n)\Big),$$

а также

$$\frac{P(0),\, \forall n(P(n) \Rightarrow P(n+1))}{\forall n\, P(n)} \text{ или } \frac{0 \in P,\, \forall n(n \in P \Rightarrow (n+1) \in P)}{P = N}.$$

Итак, утверждение "для любого $n \in N$ выполняется $P(n)$" считается доказанным, если установлены *базис индукции* (доказано $P(0)$) и *индукционный шаг* (доказано, что для любого $n \in N$ справедливо $P(n+1)$ в предположении, что выполняется $P(n)$). В этом состоит *принцип математической индукции*.

Принцип математической индукции позволяет также давать *индукционные определения*, т. е. определения понятий $P(n)$ для всех натуральных чисел n, построенные по следующей схеме:

1) задается значение $P(0)$;

2) задается правило получения значения $P(n+1)$ по числу n и значению $P(n)$.

Определим по индукции операции *сложения* $a + b$ и *умножения* $a \cdot b$ на натуральных числах. Положим $a + 0 \rightleftharpoons a$ (базис индукции). Если известно значение $a + n$, то $a + n' \rightleftharpoons (a + n)'$ (индукционный шаг). Аналогично $a \cdot 0 \rightleftharpoons 0$. Если задано $a \cdot n$, то $a \cdot n' \rightleftharpoons (a \cdot n) + a$.

Используя операцию сложения, можно ввести отношение $\leqslant$ на множестве натуральных чисел: $a \leqslant b \Leftrightarrow \exists\, c(a + c = b)$.

Определим по индукции функцию $n!$ (*n-факториал*): $0! \rightleftharpoons 1$, $(n + 1)! \rightleftharpoons n! \cdot (n + 1)$.

П р и м е р 1.3.1. Докажем по индукции *неравенство Бернулли*: $(1 + a)^n \geqslant 1 + an$ для всех $n \in N$ и $a > -1$, $a \in \mathbb{R}$.

При $n = 0$ неравенство имеет вид $(1 + a)^0 \geqslant 1 + a \cdot 0$ и оно справедливо, т. е. базис индукции выполняется. Установим справедливость индукционного шага. Предположим, что

$$(1 + a)^n \geqslant 1 + an, \tag{1.1}$$

и покажем, что
$$(1+a)^{n+1} \geqslant 1 + a(n+1). \tag{1.2}$$
Умножим обе части неравенства (1.1) на положительное число $1+a$. Тогда $(1+a)^n(1+a) \geqslant (1+an)(1+a)$, т. е.
$$(1+a)^{n+1} \geqslant 1 + a + an + a^2n. \tag{1.3}$$
Поскольку $a^2 \geqslant 0$, имеем
$$1 + a + an + a^2n \geqslant 1 + a + an = 1 + a(n+1). \tag{1.4}$$

Из неравенств (1.3) и (1.4) получаем неравенство (1.2). На основании принципа математической индукции заключаем, что $(1+a)^n \geqslant 1 + an$ для всех $n \in N$. $\square$

Иногда удается установить только выполнение $P(k)$ для некоторого $k > 0$ и свойство $P(n) \Rightarrow P(n+1)$ для всех $n \geqslant k$. Тогда по принципу математической индукции свойство P выполняется для всех $n \geqslant k$:
$$\frac{P(k),\ \forall n \geqslant k\ (P(n) \Rightarrow P(n+1))}{\forall n \geqslant k\ \ P(n)}.$$

Другой эквивалентной формой принципа математической индукции является *принцип полной индукции*:

если для всякого $n \in N$ из предположения, что $P(k)$ верно при любом натуральном $k < n$, следует, что $P(k)$ верно также при $k = n$, то $P(n)$ верно при любом натуральном n:
$$\frac{\forall n\,((\forall k < n\ P(k)) \Rightarrow P(n))}{\forall n\ P(n)}.$$

Эта форма используется в том случае, когда для доказательства выполнимости $P(n+1)$ необходимо использовать выполнимость свойства P не только на элементе n, но и на некоторых предыдущих элементах.

§ 1.4. Мощность множества. Конечные и бесконечные множества

Понятие мощности возникает при сравнении множеств по числу элементов.

Множества A и B называются *эквивалентными* (обозначается $A \sim B$), если существует биекция $f : A \leftrightarrow B$.

Отметим, что для любых множеств A, B, C выполняются следующие свойства:

1) $A \sim A$ (поскольку $\mathrm{id}_A : A \leftrightarrow A$);

2) если $A \sim B$, то $B \sim A$ (так как из $f : A \leftrightarrow B$ следует $f^{-1} : B \leftrightarrow A$);

3) если $A \sim B$ и $B \sim C$, то $A \sim C$ (так как из $f : A \leftrightarrow B$, $g : B \leftrightarrow C$ следует $f \circ g : A \leftrightarrow C$).

Мощностью множества A называется класс всех множеств, эквивалентных множеству A (обозначается $|A|$). Эквивалентные множества A и B называются *равномощными*: $|A| = |B|$. Если $A \sim n$ для некоторого $n \in \omega$, т. е. A имеет ровно n элементов, то множество A называется *конечным*. В этом случае пишут $|A| = n$. Таким образом, мощностью конечного множества является число его элементов.

Множество, не являющееся конечным, называется *бесконечным*. Если $A \sim \omega$, то множество A называется *счетным*: $|A| = \omega$. Если $A \sim 2^\omega$, то множество A называется *континуальным* или *континуумом*: $|A| = 2^\omega$.

На мощность множества A можно смотреть и как на новый объект, называемый *кардинальным числом* или *кардиналом*. В качестве примеров кардиналов можно взять любое натуральное число n, а также ω, 2^ω, 2^{2^ω} и т. д. Эти числа можно рассматривать как имена, обозначающие соответствующие мощности. Кардинальным числом конечного множества служит число его элементов.

Существование биекции между двумя эквивалентными множествами позволяет переносить изучение свойств с одного множества на другое, когда природа элементов не важна. Например, если $|A| = n$, то с элементами множества A можно работать как с числами $0, 1, 2, \ldots \ldots, n-1$, которые являются элементами множества n.

Говорят, что мощность множества A *не превосходит* мощности множества B: $|A| \leqslant |B|$, если A эквивалентно некоторому подмножеству множества B. Мощность множества A *меньше* мощности множества B: $|A| < |B|$, если $|A| \leqslant |B|$ и $|A| \neq |B|$.

Теорема 1.4.1 (теорема Кантора—Бернштейна). *Если* $|A| \leqslant |B|$ *и* $|B| \leqslant |A|$, *то* $|A| = |B|$. □

Следствие 1.4.2 (теорема о сравнении множеств). *Для любых множеств* A *и* B *существует одна и только одна из следующих возможностей:* $|A| = |B|$, $|A| < |B|$, $|B| < |A|$.

Определим на кардинальных числах операции *сложения*, *умножения* и *возведения в степень*. Если $|A| = \alpha$, $|B| = \beta$, то

$$\alpha + \beta \rightleftharpoons |A \cup B|, \text{ где } A \cap B = \varnothing;$$

$$\alpha \cdot \beta \rightleftharpoons |A \times B|; \ \alpha^\beta \rightleftharpoons |A^B|.$$

В случаях, когда $\alpha, \beta \in \omega$, введенные таким образом операции совпадают с обычными операциями на натуральных числах. Для конечных кардиналов справедливы следующие три правила, используемые в комбинаторике.

Правило суммы. Если $|A| = m$, $|B| = n$, то $|A \cup B| = m + n - |A \cap B|$, и $|A \cup B| = m + n$ в том и только том случае, когда $A \cap B = \varnothing$.

Правило произведения. Если $|A| = m$, $|B| = n$, то $|A \times B| = m \cdot n$.

Правило степени. Если $|A| = m$, $|B| = n$, то $|A^B| = m^n$.

Следующее утверждение показывает, что операции на бесконечных кардиналах могут иметь "необычные" свойства.

Предложение 1.4.3. $\omega^2 \sim \omega$.

Доказательство. По определению множество $\omega^2 = \omega \times \omega$ равно $\{(m, n) \mid m, n \in \omega\}$. На координатной плоскости изобразим точки с натуральными координатами (m, n) (рис. 1.7).

Очевидно, что все эти точки расположены в первой четверти. Для доказательства утверждения требуется установить биекцию между множеством натуральных чисел и полученными точками, т. е. перенумеровать точки. Нумеруем точки "по диагонали": $0 \mapsto (0, 0)$, $1 \mapsto (0, 1)$, $2 \mapsto (1, 0)$, $3 \mapsto (0, 2)$, $4 \mapsto (1, 1)$, $5 \mapsto (2, 0)$, $6 \mapsto (0, 3)$, $7 \mapsto (1, 2)$ и т. д. Так как указанная нумерация разнозначна и каждая пара натуральных чисел имеет натуральный номер, то это отображение осуществляет взаимно однозначное соответствие $\omega \leftrightarrow \omega^2$. $\square$

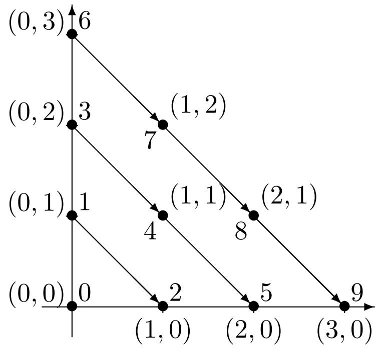


Рис. 1.7

Предложение 1.4.4. $\omega \sim \bigcup\limits_{n \in \omega} \omega^n$.

Доказательство. Так как для любого $n \in \omega$ существует биекция $f_n : \omega \leftrightarrow \omega^n$, то достаточно установить, что найдется биекция $\varphi : \omega \leftrightarrow (\bigcup\limits_{1 \leqslant n \in \omega} \{(n, k) \mid k \in \omega\}) \cup \{\varnothing\}$, т. е. $\varphi : \omega \leftrightarrow \{(n, k) \mid n, k \in \omega, n \geqslant 1\} \cup \{\varnothing\}$. Биекция φ легко строится с помощью биекции $\psi : \omega \leftrightarrow \omega^2$ из предложения 1.4.3: $\varphi(0) = \varnothing$, $\varphi(m + 1) = (n + 1, k)$, где $\psi(m) = (n, k)$, $m \in \omega$. $\square$

Предложение 1.4.5. $|\mathbb{Q}| = \omega$.

Доказательство. Поскольку множество рациональных чисел $\mathbb{Q}$ состоит из дробей вида $\frac{m}{n}$, где $m \in \mathbb{Z}$, $n \in \omega \setminus \{0\}$, его можно представить в виде множества пар (m, n). Так как множество таких пар содержится в $\mathbb{Z}^2$, а $|\mathbb{Z}^2| = \omega$, то $|\mathbb{Q}| \leqslant \omega$. С другой стороны, очевидно, множество $\mathbb{Q}$ бесконечно, т. е. $|\mathbb{Q}| \geqslant \omega$. По теореме Кантора—Бернштейна заключаем, что $|\mathbb{Q}| = \omega$. $\square$

Теорема 1.4.6. *Выполняется* $|\mathcal{P}(U)| = 2^{|U|}$ *для любого множества* U.

Доказательство. Очевидно, что любому подмножеству $A \subseteq U$ взаимно однозначно ставится в соответствие *индикаторная* функция $f \in 2^U$, для которой

$$f(x) = \begin{cases} 0, & \text{если } x \notin A, \\ 1, & \text{если } x \in A, \end{cases}$$

т. е. $\mathcal{P}(U) \sim 2^U$. Осталось заметить, что $2^{|U|} = |2^U|$. $\square$

Теорема 1.4.7 (теорема Кантора). *Выполняется* $|U| < 2^{|U|}$ *для любого множества* U. $\square$

Предложение 1.4.8. *Если* $|A| > \omega$ *и* $|B| \leqslant \omega$, *то* $|A \setminus B| = |A|$.

Доказательство. Так как $|B| \leqslant \omega$, то $|A \cap B| \leqslant \omega$. Рассмотрим множество C со следующими условиями: $A \cap B \subset C \subset A$, $|C \setminus (A \cap B)| = \omega$. Такое множество C существует, поскольку по условию имеем $|A \setminus B| > \omega$. Так как $C = (C \setminus (A \cap B)) \cup (A \cap B)$, то $|C| = \omega$ и существует биекция $f : C \setminus (A \cap B) \leftrightarrow C$. Искомая биекция $\varphi : A \setminus B \leftrightarrow A$ строится по следующим правилам: $\varphi(x) = x$, если $x \in A \setminus C$, $\varphi(x) = f(x)$, если $x \in C \setminus B$.

Предложение 1.4.9. $2^\omega \sim 10^\omega \sim \omega^\omega$.

Доказательство. Поскольку неравенства $2^\omega \leqslant 10^\omega \leqslant \omega^\omega$ очевидны, достаточно доказать неравенство $\omega^\omega \leqslant 2^\omega$, т. е. существование функции $\varphi : \omega^\omega \xrightarrow{1-1} 2^\omega$, которая кодирует всевозможные последовательности натуральных чисел с помощью последовательностей, состоящих из нулей и единиц. Для последовательности $f \in \omega^\omega$ определим последовательность $\varphi(f) \in 2^\omega$ по следующим правилам:

$$\underbrace{1, 1, \ldots, 1}_{f(0)\text{ раз}}, 0, \underbrace{1, 1, \ldots, 1}_{f(1)\text{ раз}}, 0, \ldots, \underbrace{1, 1, \ldots, 1}_{f(n)\text{ раз}}, 0, \ldots$$

Очевидно, что если $f_1 \neq f_2$ $(f_1, f_2 \in \omega^\omega)$, то $\varphi(f_1) \neq \varphi(f_2)$. $\square$

Предложение 1.4.10. $\mathbb{R} \sim [0, 1]$.

Доказательство. Равенство мощностей отрезка $I_1 = [0, 1]$ и интервала $I_2 = (0, 1)$ обеспечивается биекцией $\varphi : I_1 \leftrightarrow I_2$, задаваемой по следующему правилу:

$$\varphi(x) = \begin{cases} x, & \text{если } x \neq 0, x \neq \frac{1}{n}, n \in \omega \setminus \{0\}, \\ \frac{1}{2}, & \text{если } x = 0, \\ \frac{1}{3}, & \text{если } x = 1, \\ \frac{1}{n+2}, & \text{если } x = \frac{1}{n}, n > 1. \end{cases}$$

В свою очередь, биекция $\psi(x) = \operatorname{tg}(\pi(x - \frac{1}{2}))$ (рис. 1.8) определяет эквивалентность интервала I_2 и множества $\mathbb{R}$. Следовательно, $\mathbb{R} \sim [0, 1]$. $\square$

Предложение 1.4.11. *Множество вещественных чисел* $\mathbb{R}$ *континуально.*

Доказательство. В силу предложений 1.4.9 и 1.4.10 достаточно установить, что $10^\omega \sim [0, 1]$. Рассмотрим множество $X = \{f \in 10^\omega | f(m) \neq 9$ для некоторого $m \in \omega$ и существует $k \in \omega$ такое, что $f(n) = 9$ для всех $n > k\}$. Так как множество $10^\omega \setminus X$ взаимно однозначно соответствует множеству бесконечных десятичных дробей, задающих числа из $[0, 1]$, то по теореме Кантора и предложению 1.4.8 остается показать, что множество X счетно. Нетрудно заметить, что множество X эквивалентно множеству $\bigcup\limits_{n \in \omega} \omega^n$, поскольку каждая функция $f \in X$ однозначно определяется кортежем цифр $(f(0), \ldots, f(k))$, где $f(k) \neq 9$ и $f(n) = 9$ для всех $n > k$. Теперь из предложения 1.4.4 получаем $X \sim \bigcup\limits_{n \in \omega} \omega^n \sim \omega$, т. е. $|X| = \omega$. $\square$

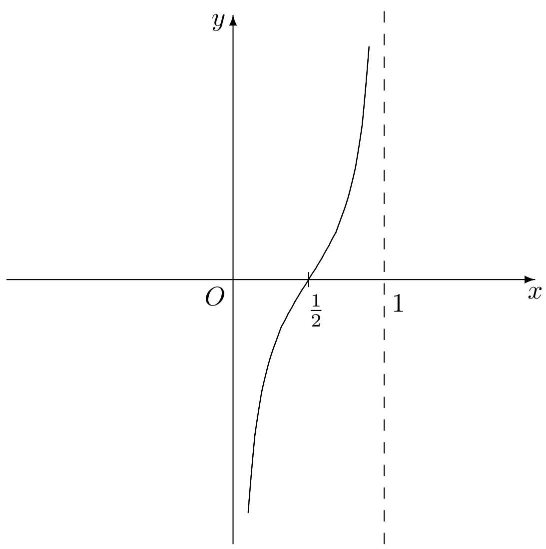


Рис. 1.8

§ 1.5. Матрица бинарного отношения. Специальные бинарные отношения

Рассмотрим два конечных множества $A = \{a_1, a_2, \ldots, a_m\}$, $B = \{b_1, b_2, \ldots, b_n\}$ и бинарное отношение $P \subseteq A \times B$. Определим *матрицу* $[P] = (p_{ij})$ размера $m \times n$ бинарного отношения P по следующему правилу:

$$p_{ij} = \begin{cases} 1, & \text{если } (a_i, b_j) \in P, \\ 0, & \text{если } (a_i, b_j) \notin P. \end{cases}$$

Полученная матрица содержит полную информацию о связях между элементами и позволяет представлять эту информацию на компьютере. Заметим, что любая матрица, состоящая из нулей и единиц, является матрицей некоторого бинарного отношения.

П р и м е р 1.5.1. Матрица бинарного отношения $P \subseteq A^2$, $A = \{1, 2, 3\}$, заданного на рис. 1.9, имеет вид

$$[P] = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Отметим основные свойства матриц бинарных отношений.

1. Если $P, Q \subseteq A \times B$, $[P] = (p_{ij})$, $[Q] = (q_{ij})$, то $[P \cup Q] = (p_{ij} + q_{ij})$ и $[P \cap Q] = (p_{ij} \cdot q_{ij})$, где сложение осуществляется по правилам $0 + 0 \rightleftharpoons 0$, $1 + 1 \rightleftharpoons 1+ +0 \rightleftharpoons 0 + 1 \rightleftharpoons 1$, а умножение — обычным образом. Итак, $[P \cup Q] = [P] + [Q]$, а матрица $[P \cap Q]$ получается перемножением соответствующих элементов из $[P]$ и $[Q]$: $[P \cap Q] = [P] * [Q]$.

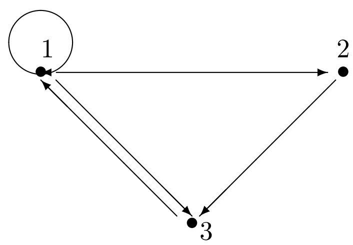


Рис. 1.9

П р и м е р 1.5.2. Пусть $[P] = \left(\begin{smallmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{smallmatrix}\right)$, $[Q] = \left(\begin{smallmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{smallmatrix}\right)$ — матрицы отношений P и Q.

Тогда

$$[P \cup Q] = [P] + [Q] = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix},$$

$$[P \cap Q] = [P] * [Q] = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} * \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}. \square$$

2. Если $P \subseteq A \times B$, $Q \subseteq B \times C$, то $[P \circ Q] = [P] \cdot [Q]$, где умножение матриц $[P]$ и $[Q]$ производится по обычному правилу умножения

матриц, но произведение и сумма элементов из $[P]$ и $[Q]$ — по определенным в п. 1 правилам.

П р и м е р 1.5.3. Если $[P] = \left(\begin{smallmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \end{smallmatrix}\right)$, $[Q] = \left(\begin{smallmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{smallmatrix}\right)$, то

$$[P \circ Q] = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}. \ \square$$

3. Матрица обратного отношения P^{-1} равна транспонированной матрице отношения P: $[P^{-1}] = [P]^{\mathrm{T}}$.

4. Если $P \subseteq Q$, $[P] = (p_{ij})$, $[Q] = (q_{ij})$, то $p_{ij} \leqslant q_{ij}$.

5. Матрица тождественного отношения id_A единична:

$$[\mathrm{id}_A] = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & \cdots & 0 \\ & & \ddots & \\ 0 & 0 & \cdots & 1 \end{pmatrix}.$$

Пусть P — бинарное отношение на множестве A: $P \subseteq A^2$. Отношение P называется *рефлексивным*, если $(x, x) \in P$ для всех $x \in A$, т. е. $\mathrm{id}_A \subseteq P$,

$$[P] = \begin{pmatrix} 1 & & & \\ & 1 & * & \\ & & \ddots & \\ & * & & \ddots \\ & & & & 1 \end{pmatrix}.$$

Отношение P называется *симметричным*, если для любых $x, y \in A$ из $(x, y) \in P$ следует $(y, x) \in P$, т. е. $P^{-1} = P$, или $[P]^{\mathrm{T}} = [P]$. Отношение P называется *антисимметричным*, если из $(x, y) \in P$ и $(y, x) \in P$ следует, что $x = y$, т. е. $P \cap P^{-1} \subseteq \mathrm{id}_A$. На языке матриц это означает, что в матрице $[P \cap P^{-1}] = [P] * [P]^{\mathrm{T}}$ все элементы вне главной диагонали являются нулевыми. Отношение P называется *транзитивным*, если из $(x, y) \in P$ и $(y, z) \in P$ следует $(x, z) \in P$, т. е. $P \circ P \subseteq P$.

П р и м е р 1.5.4. Проверим, какими свойствами обладает отношение $P \subseteq A^2$, $A = = \{1, 2, 3\}$, изображенное на рис. 1.10. Составим матрицу отношения P: $[P] = \left(\begin{smallmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{smallmatrix}\right)$. Так как в матрице $[P]$ на главной диагонали имеются нулевые элементы, отношение P *не рефлексивно*. Несимметричность матрицы $[P]$ означает, что отношение P *не симметрично*. Для проверки антисимметричности вычислим матрицу

$[P \cap P^{-1}] = [P] * [P]^{\mathrm{T}}$. Имеем

$$[P] * [P]^{\mathrm{T}} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} * \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Поскольку в полученной матрице все элементы, стоящие вне главной диагонали, нулевые, отношение P *антисимметрично*. Так как $[P\circ P] = [P]$ (проверьте!), то $P \circ P \subseteq P$, т. е. P является *транзитивным* отношением.

Пример 1.5.5. Отношение $< \rightleftharpoons \{(x,y) \mid x,y \in \mathbb{Q}$ и $x < y\}$ на множестве рациональных чисел $\mathbb{Q}$ не рефлексивно, не симметрично, антисимметрично и транзитивно.

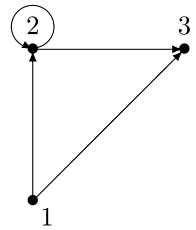


Рис. 1.10

Пример 1.5.6. Рассмотрим отношение

$$P = \{(x,y) \mid x,y \in \mathbb{Z} \text{ и } x - y < 1\}$$

на множестве целых чисел $\mathbb{Z}$.

Так как $x - x = 0 < 1$ для любого $x \in \mathbb{Z}$, отношение P рефлексивно. Поскольку $(2,4) \in P$, а $(4,2) \notin P$, отношение P не симметрично. Заметим, что если $x - y < 1$ и $y - x < 1$, то $x = y$, так как из $x \neq y$ следует $|x - y| \geqslant 1$. Таким образом, отношение P антисимметрично. Предположим теперь, что $(x,y),(y,z) \in P$, т. е. $x - y < 1$ и $y - z < 1$. Имеем $x < y$ и $y < z$, тогда $x < z$, значит, $x - z < 1$, т. е. $(x,z) \in P$. Следовательно, отношение P транзитивно.

§ 1.6. Отношения эквивалентности и разбиения. Фактор-множества

Отношение P называется отношением *эквивалентности* (*эквивалентностью*), если P рефлексивно, симметрично и транзитивно. Эквивалентности часто обозначают символами E и $\sim$ (*тильда*): $x\,E\,y$, $x \sim y$.

Пример 1.6.1. 1. Отношение равенства $x = y$ является эквивалентностью на любом множестве A, так как оно рефлексивно ($x = x$), симметрично ($x = y \Rightarrow y = x$) и транзитивно ($x = y, y = z \Rightarrow x = z$).

2. Отношение подобия на множестве треугольников есть отношение эквивалентности.

3. На любом множестве $\mathcal{P}(U)$ отношение равномощности $|A| = |B|$ является отношением эквивалентности (см. § 1.4).

4. Отношение принадлежности к одной студенческой группе на множестве студентов НГТУ — отношение эквивалентности.

5. Рассмотрим множество M программ, вычисляющих некоторые функции. Отношение $E = \{(x, y) \mid$ программы x и y вычисляют одну и ту же функцию$\}$ является эквивалентностью.

Пусть E — эквивалентность на множестве A. *Классом эквивалентности* элемента $x \in A$ называется множество $E(x) \rightleftharpoons \{y \mid x\,E\,y\}$. Классы эквивалентности E будут также называться *E-классами*. Множество $A/E \rightleftharpoons \{E(x) | x \in A\}$ называется *фактор-множеством* множества A по отношению E.

П р и м е р 1.6.2. 1. Для отношения равенства $=$ на множестве A каждый $=$-класс состоит только из одного элемента: $=(x) = \{x\}$ для любого $x \in A$. Таким образом, фактор-множество $A/\!=$ имеет вид $\{\{x\} \mid x \in A\}$ и, следовательно, биективно множеству A.

2. Для отношения принадлежности к одной студенческой группе классом эквивалентности является множество студентов одной группы. Фактор-множество множества студентов НГТУ по этому отношению эквивалентности представляет собой множество студенческих групп НГТУ.

Предложение 1.6.1. *Множество A/E является разбиением множества A. Обратно, если $\mathcal{R} = \{A_i\}$ — некоторое разбиение множества A, то можно задать соответствующее ему отношение эквивалентности E по следующему правилу:*

$$x\,E\,y \Leftrightarrow x, y \in A_i \text{ для некоторого } i. \ \Box$$

Таким образом, существует биекция между множеством всех отношений эквивалентности на множестве A и множеством всех разбиений множества A.

В любом классе $E(x)$ эквивалентности E каждый элемент $y \in E(x)$ связан отношением E с любым элементом $z \in E(x)$. Поэтому если E — эквивалентность на конечном множестве A, $A/E = \{E(x_1), \ldots, E(x_n)\}$, $E(x_i) = \{b^i_1, \ldots, b^i_{m_i}\}$, $i = 1, \ldots, n$, и множество A перенумеровано в следующем порядке: $b^1_1, \ldots, b^1_{m_1}, b^2_1, \ldots, b^2_{m_2}, \ldots, b^n_1, \ldots, b^n_{m_n}$, то матрица $[E]$ имеет блочно-диагональный вид:

$$[E] = \begin{array}{rc} & \begin{array}{cccc} \overbrace{\quad\;}^{m_1} & \overbrace{\quad\;}^{m_2} & \cdots & \overbrace{\quad\;}^{m_n} \end{array} \\ \begin{array}{r} m_1\{ \\ m_2\{ \\ \vdots \\ m_n\{ \end{array} & \begin{pmatrix} \boxed{1} & & & 0 \\ & \boxed{1} & & \\ & & \ddots & \\ 0 & & & \boxed{1} \end{pmatrix} \end{array},$$

где блоки $\boxed{1}$ состоят из единиц, а остальные элементы равны 0.

Если же множество A перенумеровано произвольным образом: $A = \{a_1, \ldots, a_n\}$, E — отношение эквивалентности на A, то матрица $[E] = (e_{ij})$ приводится к блочно-диагональному виду некоторыми одновременными перестановками строк и столбцов. Элементы a_i и a_j эквивалентны по отношению E тогда и только тогда, когда i-я и j-я строки (а также столбцы) матрицы $[E]$ совпадают. Класс эквивалентности $E(a_i)$ состоит из элементов a_j, для которых $e_{ij} = 1$.

П р и м е р 1.6.3. Рассмотрим множество $A = \{1, 2, 3, 4, 5\}$ с разбиением $\mathcal{R} = \{\{1,3,5\},\{2,4\}\}$, задающим отношение эквивалентности E с двумя E-классами $\{1,3,5\}$ и $\{2,4\}$. Матрица $[E]$ имеет вид $\begin{pmatrix} 1&0&1&0&1\\ 0&1&0&1&0\\ 1&0&1&0&1\\ 0&1&0&1&0\\ 1&0&1&0&1 \end{pmatrix}$. По этой матрице легко определить, что класс $E(3)$ равен $\{1,3,5\}$, так как в 3-й строке только e_{31}, e_{33} и e_{35} равны 1.

§ 1.7. Отношения порядка

Отношение эквивалентности является обобщением отношения равенства: эквивалентные элементы считаются “равными”. Обобщением обычного отношения $\leqslant$ служат отношения порядка.

Отношение $P \subseteq A^2$ называется *предпорядком* или *квазипорядком*, если P рефлексивно и транзитивно.

П р и м е р 1.7.1. Отношение $P = \{(1,1), (2,2), (3,3), (1,2), (2,1), (2,3), (1,3)\}$ на множестве $\{1,2,3\}$ является предпорядком (рис. 1.11). $\square$

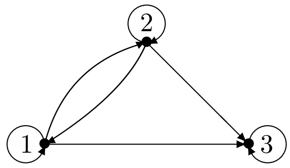


Рис. 1.11

Отношение $P \subseteq A^2$ называется *частичным порядком*, если P рефлексивно, транзитивно и антисимметрично. Таким образом, частичный порядок — это антисимметричный предпорядок. Частичный порядок обычно обозначается символом $\leqslant$, а обратное ему отношение $\leqslant^{-1}$ — символом $\geqslant$. Отношение $\geqslant$ также является частичным порядком и называется *двойственным* порядку $\leqslant$. Используя отношение $\leqslant$, определим отношение $<$, называемое *строгим* порядком, по следующему правилу: $x < y \;\Leftrightarrow\; x \leqslant y$ и $x \neq y$. Заметим, что отношение строгого порядка не является частичным порядком, так как не выполняется условие рефлексивности (неверно, что $x < x$).

П р и м е р 1.7.2. Частичным порядком является обычное отношение $\leqslant$ на множестве $\mathbb{N}$. Действительно, это отношение рефлексивно ($x \leqslant x$), транзитивно ($x \leqslant y$, $y \leqslant z \Rightarrow x \leqslant z$) и антисимметрично ($x \leqslant y$, $y \leqslant x \Rightarrow x = y$).

П р и м е р 1.7.3. Отношение, изображенное на рис. 1.12, является частичным порядком, а отношение из примера 1.7.1 — нет.

П р и м е р 1.7.4. Отношение включения $\subseteq$ на булеане $\mathcal{P}(U)$ образует частичный порядок. $\square$

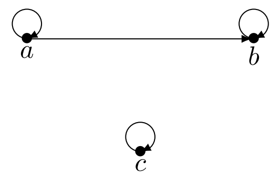


Рис. 1.12

Заметим, что в примерах 1.7.3 и 1.7.4 имеются элементы x и y, про которые нельзя сказать, что $x \leqslant y$ или $y \leqslant x$ (например, при $a = x$, $y = c$ из примера 1.7.3). Такие элементы называются *несравнимыми*. Частичный порядок $\leqslant \subseteq A^2$ называется *линейным порядком*, если любые два элемента x и y из множества A сравнимы, т. е. $x \leqslant y$ или $y \leqslant x$ (линейным является частичный порядок из примера 1.7.2).

Непустое множество A, на котором зафиксирован некоторый частичный (линейный) порядок, называется *частично* (*линейно*) *упорядоченным множеством* (сокращенно ч.у.м. или л.у.м.).

П р и м е р 1.7.5. Пары $\langle\omega;\leqslant\rangle$, $\langle[0,1];\leqslant\rangle$ с обычными отношениями $\leqslant$ образуют линейно упорядоченные множества. $\square$

Элемент $a \in A$ частично упорядоченного множества $\mathfrak{A} = \langle A;\leqslant\rangle$ называется *максимальным* (*минимальным*), если для всех $x \in A$ из $a \leqslant x$ ($x \leqslant a$) следует $x = a$. Элемент $a \in A$ называется *наибольшим* (*наименьшим*), если $x \leqslant a$ ($a \leqslant x$) для всех $x \in A$. Наибольший (наименьший) элемент ч.у.м. $\mathfrak{A}$ (если он существует) обозначается через $\max\mathfrak{A}$ ($\min\mathfrak{A}$). Наибольший элемент часто называют *единицей*, а наименьший — *нулем* множества $\mathfrak{A}$. Заметим, что всякий наибольший элемент является максимальным, а всякий наименьший элемент — минимальным. Обратное утверждение, вообще говоря, неверно (см. пример 1.7.6). Всякое конечное ч.у.м. содержит как максимальные, так и минимальные элементы.

П р и м е р 1.7.6. Частично упорядоченное множество $\langle\{1,2,3\};\leqslant\rangle$, изображенное на рис. 1.13, имеет наибольший элемент 2, минимальные элементы 1, 3, но не имеет наименьшего элемента.

П р и м е р 1.7.7. Линейно упорядоченное множество $\langle[0,1);\leqslant\rangle$ имеет наименьший элемент 0, но не имеет наибольшего элемента. $\square$

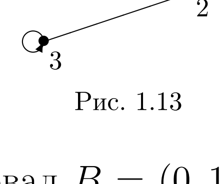


Рис. 1.13

Пусть $\mathfrak{A} = \langle A;\leqslant\rangle$ — ч.у.м., B — подмножество A. Элемент $a \in A$ называется *верхней* (*нижней*) *гранью* множества B, если $b \leqslant a$ ($a \leqslant b$) для всех $b \in B$.

П р и м е р 1.7.8. Рассмотрим ч.у.м. $\langle\mathbb{R};\leqslant\rangle$ и интервал $B = (0,1]$. Тогда любое число $x \geqslant 1$ является верхней гранью B, а любое число $x \leqslant 0$ — нижней гранью B. $\square$

Элемент $a \in A$ называется *точной верхней гранью* (*супремумом*) множества B (обозначается $\sup B$), если a — наименьшая из верхних граней множества B. Элемент $a \in A$ называется *точной нижней гранью* (*инфимумом*) множества B (обозначается $\inf B$), если a — наибольшая из нижних граней множества B.

В примере 1.7.8 имеем $\sup B = 1$, $\inf B = 0$.

Линейный порядок $\leqslant$ на множестве A называется *полным*, если каждое непустое подмножество множества A имеет наименьший элемент. Пара $\langle A; \leqslant\rangle$, в которой отношение $\leqslant$ является полным порядком на множестве A, называется *вполне упорядоченным множеством* (сокращенно в.у.м.).

П р и м е р 1.7.9. Пара $\langle \omega; \leqslant\rangle$ является в.у.м., а пара $\langle [0,1]; \leqslant\rangle$ — нет, поскольку, например, полуоткрытый интервал $(1/2, 1]$, являющийся подмножеством $[0,1]$, не содержит наименьшего элемента. $\square$

Определим отношение, на котором основано упорядочение слов в словарях.

Рассмотрим непустое множество символов $X = \{x,\ y,\ z,\ \ldots\}$, называемое *алфавитом*. Конечные наборы написанных друг за другом символов из X называются *словами* (например, x, y, xy, yx, zxx, $xyyz$ и т. д.). Элемент x_i слова $x_1 x_2 \ldots x_n$ называется его *i-й координатой*. Число n называется *длиной слова* $x_1 x_2 \ldots x_n$. Множество слов алфавита X обозначим через $W(X)$. При этом будем считать, что $W(X)$ содержит слово Λ, не имеющее символов и называемое *пустым словом*. Длина пустого слова Λ по определению равна нулю. Заметим, что каждое слово $x_1 x_2 \ldots x_n$ из $W(X)$ взаимно однозначно соответствует упорядоченному набору $\langle x_1, x_2, \ldots, x_n\rangle$ из X^n. Следовательно, множество $W(X)$ биективно множеству $\bigcup\limits_{n\in\omega} X^n$, и, значит, бесконечно.

Пусть $\leqslant$ — отношение порядка на множестве X. Определим на множестве $W(X)$ отношение *лексикографического порядка* $\mathcal{L}$ по следующему правилу: $x_1 x_2 \ldots x_m \,\mathcal{L}\, y_1 y_2 \ldots y_n \Leftrightarrow$ ($m \leqslant n$ и $x_i = y_i$ для всех $1 \leqslant i \leqslant m$) или (существует $i \leqslant m$ такое, что $x_i < y_i$, и для всех $j < i$ выполняется $x_j = y_j$).

Утверждение 1.7.1. *Если $\langle X; \leqslant\rangle$ — л.у.м., то $\langle W(X); \mathcal{L}\rangle$ — л.у.м.*

Обозначим через $W_n(X)$ множество слов алфавита X, длина которых не превосходит n, через $\mathcal{L}_n$ — ограничение отношения $\mathcal{L}$ на множество $W_n(X)$: $\mathcal{L}_n \rightleftharpoons \mathcal{L} \cap (W_n(X))^2$.

Утверждение 1.7.2. *Если $\langle X; \leqslant\rangle$ — в.у.м., то $\langle W_n(X); \mathcal{L}_n\rangle$ — в.у.м. для любого $n \in \omega$.* $\square$

Рассмотрим частично упорядоченное множество $\langle A; \leqslant\rangle$. Говорят, что элемент y *покрывает* элемент x, если $x \leqslant y$ и не существует такого элемента z, что $x < z < y$. Если множество A конечно, частично упорядоченное множество $\langle A; \leqslant\rangle$ можно представить в виде схемы, в которой каждый элемент изображается точкой на плоскости, и если y покрывает x, то точки x и y соединяют отрезком, причем точку, соответствующую x, располагают ниже y. Такие схемы называются *диаграммами Хассе*. На рис. 1.14 показаны две диаграммы Хассе. Вторая диаграмма соответствует линейно упорядоченному множеству.

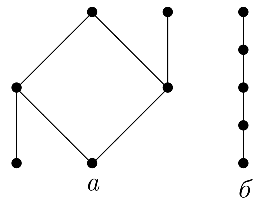


Рис. 1.14

П р и м е р 1.7.10. 1. Рассмотрим частично упорядоченное множество $\langle \mathcal{P}(A); \subseteq\rangle$, где $A = \{1, 2, 3\}$. Множество $\mathcal{P}(A)$ содержит восемь элементов: $\{0, \{1\}, \{2\}, \{3\}, \{1, 2\}, \{1, 3\}, \{2, 3\}, \{1, 2, 3\}\}$. На рис. 1.15*а* изображена диаграмма Хассе, соответствующая $\langle \mathcal{P}(A); \subseteq\rangle$.

2. Пусть $A = \{1,\ 2,\ 3,\ 5,\ 6,\ 10,\ 15,\ 30\}$. Рассмотрим отношение частичного порядка $\leqslant$ на множестве A, задаваемое по правилу:

$$x \leqslant y \Leftrightarrow y \text{ делится на } x.$$

Диаграмма Хассе для ч.у.м. $\langle A; \leqslant\rangle$ изображена на рис. 1.15*б*.

3. На рис. 1.15*в* изображена диаграмма Хассе линейно упорядоченного множества $\langle\{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7\}; \leqslant\rangle$ с обычным отношением порядка на множестве натуральных чисел, не превосходящих семи. $\square$

Заметим, что диаграммы Хассе первых двух отношений совпадают. Это означает, что эти частично упорядоченные множества имеют одинаковую структуру, причем отличную от структуры третьего ч.у.м.,

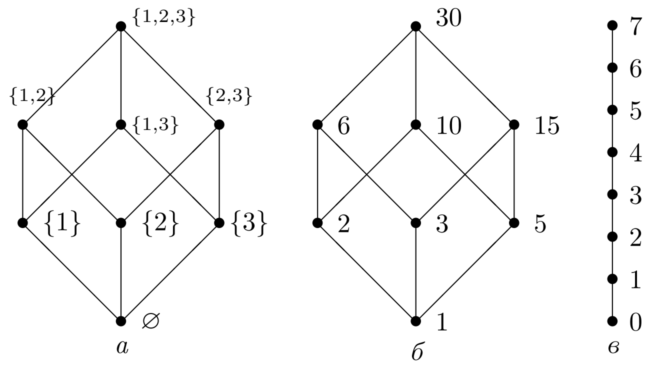


Рис. 1.15

хотя оно тоже содержит восемь элементов. Формально такая общность структуры определяется понятием изоморфизма.

Пусть $\mathfrak{A} = \langle A; \leqslant_{\mathfrak{A}} \rangle$, $\mathfrak{B} = \langle B, \leqslant_{\mathfrak{B}} \rangle$ — частично упорядоченные множества. Отображение $f : A \to B$ называется *изоморфизмом* частично упорядоченных множеств $\mathfrak{A}$ и $\mathfrak{B}$, если выполняются следующие условия:

— f — биекция между множествами A и B;

— для любых $a_1, a_2 \in A$, $a_1 \leqslant_{\mathfrak{A}} a_2$ тогда и только тогда, когда $f(a_1) \leqslant_{\mathfrak{B}} f(a_2)$.

Если существует изоморфизм между $\mathfrak{A}$ и $\mathfrak{B}$, то частично упорядоченные множества $\mathfrak{A}$ и $\mathfrak{B}$ называются *изоморфными* и этот факт обозначается через $\mathfrak{A} \simeq \mathfrak{B}$.

Теорема 1.7.3. *Всякое частично упорядоченное множество $\mathfrak{A} = \langle A; \leqslant \rangle$ изоморфно некоторой системе подмножеств множества A, частично упорядоченной отношением включения.* $\square$

§ 1.8. Задачи и упражнения

1. Доказать, что $\{\varnothing\} \neq \varnothing$.

2. Доказать, что $\{\{0, 1\}, \{0, 2\}\} \neq \{0, 1, 2\}$.

3. Доказать, что $\overline{(\overline{A} \cup \overline{B})} = A \cap B$.

4. Построить пример множеств A и B таких, что $A \times B \neq B \times A$.

5. Пусть $[0, 1], [0, 2]$ — отрезки на числовой прямой. Дать геометрическую интерпретацию множеств $[0, 1] \times [0, 2]$, $[0, 1]^2$, $[0, 2]^3$.

6. Изобразить отношения $P = \{(a, 1), (a, 2), (b, 2), (b, 3), (c, 1), (c, 4)\}$ и $Q = \{(1, \alpha), (2, \beta), (3, \alpha)\}$. Найти δ_Q, ρ_Q и $P \circ Q$.

7. Для отношений $P = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 | x = y^2\}$ и $Q = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 | x \cdot y > > 0\}$ найти $P \circ Q$, $Q \circ P$, $P \circ P$ и P^{-1}.

8. Пусть A и B — конечные множества мощности m и n соответственно. Найти:

   а) число бинарных отношений между элементами множеств A и B; б) число функций из A в B; в) число инъекций из A в B; г) число биекций из A в B.

9. Доказать следующие эквивалентности:

   а) $A \times B \sim B \times A$; б) $(A \times B)^C \sim A^C \times B^C$.

10. Доказать, что:

    а) если A — конечное множество, B — подмножество множества A, то множество B конечно;

б) если $A_1, \ldots, A_n$ — конечные множества, то множества $A_1 \cup \cup \ldots \cup A_n$ и $A_1 \times \ldots \times A_n$ конечны.

11. Доказать, что если A — счетное множество, B — конечное множество, то множество $A \setminus B$ счетно.

12. Доказать, что если множества A_i, $i \in \omega$, счетны, то множество $\bigcup\limits_{i \in \omega} A_i$ счетно.

13. Доказать, что если A — счетное множество, то множество $\bigcup\limits_{n \in \omega} A^n$ всех конечных последовательностей, составленных из элементов множества A, счетно.

14. Доказать, что множество всех многочленов от одной переменной с рациональными коэффициентами счетно.

15. Доказать, что множества точек отрезка и квадрата эквивалентны.

16. Построить бинарное отношение:

    а) рефлексивное, симметричное, не транзитивное;

    б) не рефлексивное, антисимметричное, не транзитивное;

    в) рефлексивное, не симметричное, транзитивное.

17. Пусть $\mathcal{L}$ — множество всех прямых на плоскости. Являются ли эквивалентностями следующие отношения:

    а) отношение параллельности двух прямых;

    б) отношение перпендикулярности двух прямых?

18. Доказать, что отношение $\{((x_1, y_1), (x_2, y_2)) \mid x_1^2 + y_1^2 = x_2^2 + y_2^2\}$ является отношением эквивалентности на множестве $\mathbb{R}^2$. Определить классы этой эквивалентности.

19. Доказать, что отношение $\{(a, b) \mid (a - b)$ — рациональное число$\}$ является отношением эквивалентности на множестве вещественных чисел.

20. Пусть на множестве ω определено отношение $\leqslant$, задаваемое следующим правилом: $m \leqslant n \Leftrightarrow m$ делит n. Считая, что 0 делит 0, показать, что $\leqslant$ — частичный порядок. Для произвольных натуральных чисел m и n найти $\inf\{m, n\}$ и $\sup\{m, n\}$ относительно указанного порядка.

21. Для обычных отношений $\leqslant$ и $<$ на множестве ω показать, что $< \circ < \neq <$, $\leqslant \circ < = <$ и $\leqslant \circ \geqslant = \omega^2$.

22. Построить пример ч.у.м. с единственным минимальным элементом, но без наименьшего.

23. Рассмотрим на множестве $\mathbb{R}^2$ отношение Парето Π:

$$(x_1, y_1)\,\Pi\,(x_2, y_2) \Leftrightarrow x_1 \leqslant x_2 \text{ и } y_1 \leqslant y_2.$$

    Для точек $A(a_1, a_2)$ и $B(b_1, b_2)$ найти множество нижних и верхних граней множества $\{A, B\}$. Чему равен $\inf\{A, B\}$ и $\sup\{A, B\}$?

24. Построить линейный порядок на множестве комплексных чисел.
25. Составить матрицу отношения полного порядка, при котором нумерация элементов ведется: а) по возрастанию отношения; б) по его убыванию.

После изучения главы 1 выполняются задачи 1–5 контрольной работы. Задача 1 решается аналогично примеру 1.1.6 и предложению 1.1.1, задача 2 — аналогично примеру 1.3.1, задача 3 — аналогично примерам и утверждениям из §1.4, а задачи 4 и 5 — аналогично примерам из §1.5.

Глава 2

АЛГЕБРАИЧЕСКИЕ СИСТЕМЫ

§ 2.1. Определения и примеры

Рассмотрим непустое множество A. В § 1.2 было введено понятие n-местной операции на множестве A: $f : A^n \to A$. Отметим, что, поскольку операция f является функцией, для любого набора $(x_1, \ldots, x_n) \in A^n$ результат применения операции $f(x_1, \ldots, x_n)$ однозначно определен. Так как область значений операции f лежит в множестве A, то будем говорить, что операция f *замкнута* на множестве A.

Сигнатурой или *языком* Σ называется совокупность предикатных и функциональных символов с указанием их местности. 0-Местный функциональный символ называется *константным* символом или просто *константой*. Если α — функциональный или предикатный символ, то его местность обозначается через $\mu(\alpha)$. n-Местные предикатные и функциональные символы часто будем обозначать соответственно через $P^{(n)}$ и $f^{(n)}$. Если в рассматриваемой сигнатуре используются стандартные символы, такие, например, как $+$ для операции сложения, $\leqslant$ для отношения порядка, $|$ для отношения делимости, 0 для константного символа и другие, то мы просто пишем $\Sigma = \{\leqslant\}$, $\Sigma = \{\leqslant, +, \cdot, 0\}$, $\Sigma = \{+, -, |, 0, 1\}$ и т.д.

Алгебраической системой $\mathfrak{A} = \langle A; \Sigma \rangle$ сигнатуры Σ называется непустое множество A, где каждому n-местному предикатному (функциональному) символу из Σ поставлен в соответствие n-местный предикат (соответственно операция), определенный на множестве A. Множество A называется *носителем* или *универсумом* алгебраической системы $\langle A; \Sigma \rangle$. Предикаты и функции, соответствующие символам из Σ, называются их *интерпретациями*. Обозначать интерпретации будем теми же буквами, что и соответствующие символы сигнатуры. Заметим, что интерпретацией любого константного символа является некоторый элемент (*константа*) из A.

Алгебраические системы в дальнейшем будут обозначаться готическими буквами $\mathfrak{A}, \mathfrak{B}, \ldots$ (возможно, с индексами), а их носители — соответствующими латинскими буквами $A, B, \ldots$ (с соответствующими индексами). Иногда мы будем отождествлять носитель с алгебраической системой.

Мощностью алгебраической системы $\mathfrak{A}$ называется мощность ее носителя A. В дальнейшем будем часто опускать слово "алгебраическая" и называть $\mathfrak{A}$ *системой* или *структурой*.

Сигнатура Σ называется *функциональной* (*предикатной*), если она не содержит предикатных (функциональных) символов. Система $\mathfrak{A}$ называется *алгеброй* (*моделью*), если ее сигнатура функциональна (предикатна).

Пример 2.1.1. 1. Набор $\langle \omega; +, \cdot \rangle$ является алгеброй с двумя двухместными операциями.

2. Набор $\langle \omega; \leqslant, +, \cdot, \ ', 0, 1 \rangle$ является системой с бинарным отношением $\leqslant$ ($\mu(\leqslant) = 2$), двухместными операциями $+$, $\cdot$ ($\mu(+) = \mu(\cdot) = 2$), одноместной операцией $\ ' : n \mapsto n{+}1$ ($\mu(\ ') = 1$) и двумя нуль-местными операциями (константами) 0, 1 ($\mu(0) = \mu(1) = 0$).

3. Набор $\langle \mathbb{Z}; +, :, \sqrt{2} \rangle$ не образует алгебру, поскольку деление не является операцией на множестве $\mathbb{Z}$ (например, $2 : 3 \notin \mathbb{Z}$), а элемент $\sqrt{2}$ не принадлежит $\mathbb{Z}$.

4. Набор $\langle \mathcal{P}(U); \cap, \cup, \bar{\ }, 0, 1 \rangle$ с двухместными операциями $\cap$, $\cup$, одноместной операцией $\bar{\ } : A \mapsto \overline{A}$, константами $0 = \varnothing$ и $1 = U$ является алгеброй, называемой *алгеброй Кантора*.

5. Алгеброй является любое кольцо.

6. Пара $\langle \{f(x) | f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}\}; \frac{d}{dx} \rangle$ (где $\frac{d}{dx}$ — операция дифференцирования) не является алгеброй, поскольку не всякая функция дифференцируема, но если рассмотреть множество $A = \{f(x) \mid f(x)$ дифференцируема бесконечное число раз$\}$, то отображение дифференцирования $\frac{d}{dx} : f \mapsto \frac{df}{dx}$ является операцией на A и пара $\langle A; \frac{d}{dx} \rangle$ образует алгебру. $\square$

Заметим, что частичную операцию f, отображающую A^n в A, можно рассматривать как $(n+1)$-местное отношение

$$R_f \rightleftharpoons \{(x_1, x_2, \ldots, x_n, y) | (x_1, \ldots, x_n) \in A^n \text{ и } y = f(x_1, \ldots, x_n)\}.$$

Поэтому в последнем примере пару $\langle \{f(x) | f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}\}; \frac{d}{dx} \rangle$ можно считать алгебраической системой, если рассматривать $\frac{d}{dx}$ как бинарное отношение $\{(f, g) | g = \frac{df}{dx}\}$.

Алгебра $\mathfrak{A}$ сигнатуры $\Sigma = \{f\}$, где $\mu(f) = 2$, называется *группоидом*. Единственная здесь операция f обычно обозначается символом $\cdot$:

$\mathfrak{A} = \langle A; \cdot\rangle$. Если A — конечное множество, действия операции $\cdot$ можно задать квадратной таблицей, в которой для каждой пары $(a_i, a_j) \in A^2$ записан результат действия $\cdot(a_i, a_j)$. Такая таблица называется *таблицей Кэли* группоида $\mathfrak{A}$. Группоид $\mathfrak{A}$ называется *полугруппой*, если $\cdot$ — ассоциативная операция, т. е. для всех элементов $x, y, z \in A$ верно $x\cdot(y\cdot z) = (x\cdot y)\cdot z$. Полугруппа $\mathfrak{A}$ называется *моноидом*, если существует элемент $e \in A$, называемый *единицей*, такой, что $e\cdot x = x\cdot e = x$ для всех $x \in A$. Полугруппы и моноиды имеют особое значение в теории языков при обработке слов.

Пример 2.1.2. Пусть $W(X)$ — множество слов алфавита X. Определим на $W(X)$ *операцию конкатенации* $\hat{}$ следующим образом: если $\alpha, \beta \in W(X)$, то $\alpha\hat{}\beta = \alpha\beta$, т. е. результатом является слово, полученное соединением слов α и β (например, $xyz\hat{}zx = xyzzx$). Операция $\hat{}$ ассоциативна, т. е. для любых слов α, β, γ верно $(\alpha\hat{}\beta)\hat{}\gamma = \alpha\hat{}(\beta\hat{}\gamma)$. Следовательно, система $\langle W(X); \hat{}\rangle$ является полугруппой. Так как для всех $\alpha \in W(X)$ верно $\Lambda\hat{}\alpha = \alpha\hat{}\Lambda = \alpha$, где Λ — пустое слово, то Λ удовлетворяет свойству единицы. Таким образом, система $\langle W(X); \hat{}\rangle$ является моноидом. $\square$

Моноид $\mathfrak{A} = \langle A; \cdot\rangle$ называется *группой*, если для любого элемента $x \in A$ существует элемент $x^{-1} \in A$, называемый *обратным* к x, такой, что $x \cdot x^{-1} = x^{-1} \cdot x = e$. Группа $\mathfrak{A}$ называется *коммутативной* или *абелевой*, если $x \cdot y = y \cdot x$ для всех $x, y \in A$.

Пример 2.1.3. 1. Если $\langle K; +, \cdot\rangle$ — кольцо, то $\langle K; +\rangle$ — абелева группа.

2. Система $\langle GL_n(K); \cdot\rangle$, где $GL_n(K) = \{A | A$ — матрица порядка n над полем K, и $\det A \neq 0\}$ является группой, которая некоммутативна при $n \geqslant 2$.

§ 2.2. Морфизмы

Пусть даны алгебраические системы $\mathfrak{A} = \langle A; \Sigma\rangle$ и $\mathfrak{B} = \langle B; \Sigma\rangle$. Отображение $\varphi : A \to B$ называется *гомоморфизмом* системы $\mathfrak{A}$ в систему $\mathfrak{B}$, если выполняются следующие условия:

1) для любого функционального символа $f^{(n)} \in \Sigma$, соответствующих функций $f_{\mathfrak{A}}$ и $f_{\mathfrak{B}}$ в системах $\mathfrak{A}$ и $\mathfrak{B}$ и любых $a_1, a_2, \ldots, a_n \in A$ выполняется

$$\varphi(f_{\mathfrak{A}}(a_1, a_2, \ldots, a_n)) = f_{\mathfrak{B}}(\varphi(a_1), \varphi(a_2), \ldots, \varphi(a_n));$$

2) для любого предикатного символа $P^{(n)} \in \Sigma$, соответствующих предикатов $P_{\mathfrak{A}}$ и $P_{\mathfrak{B}}$ в системах $\mathfrak{A}$ и $\mathfrak{B}$ и любых $a_1, a_2, \ldots\ldots, a_n \in A$

выполняется

$$(a_1, a_2, \ldots, a_n) \in P_{\mathfrak{A}} \Rightarrow (\varphi(a_1), \varphi(a_2), \ldots, \varphi(a_n)) \in P_{\mathfrak{B}}.$$

Если $\varphi : A \to B$ — гомоморфизм, то будем его обозначать через $\varphi : \mathfrak{A} \to \mathfrak{B}$.

При гомоморфизме сохраняются действия операций и отношения. Это позволяет переносить изучение свойств с одной системы на другую.

П р и м е р 2.2.1. Рассмотрим системы $\mathfrak{A} = \langle \mathbb{Z}; +, \leqslant \rangle$ и $\mathfrak{B} = \langle \mathbb{Z}^2; +, \leqslant \rangle$, где в системе $\mathfrak{B}$ сложение задается по правилу

$$(a_1, b_1) + (a_2, b_2) = (a_1 + a_2, b_1 + b_2),$$

а отношение порядка —

$$(a_1, b_1) \leqslant (a_2, b_2) \Leftrightarrow a_1 \leqslant a_2 \text{ и } b_1 \leqslant b_2.$$

Отображение $\varphi : \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}^2$, при котором $\varphi(a) = (a, 0)$, является гомоморфизмом. Действительно, для любых $a, b \in \mathbb{Z}$ имеем

$$\varphi(a + b) = (a + b, 0) = (a, 0) + (b, 0) = \varphi(a) + \varphi(b),$$

и если $a \leqslant b$, то $(a, 0) \leqslant (b, 0)$, т. е. $\varphi(a) \leqslant \varphi(b)$. $\square$

Гомоморфизм $\varphi : \mathfrak{A} \to \mathfrak{B}$, являющийся инъекцией, называется *мономорфизмом*. Гомоморфизм $\varphi : \mathfrak{A} \to \mathfrak{B}$, являющийся сюръекцией, называется *эпиморфизмом*, и при этом система $\mathfrak{B}$ называется *гомоморфным образом* системы $\mathfrak{A}$. Гомоморфизм $\varphi : \mathfrak{A} \to \mathfrak{A}$ называется *эндоморфизмом*. Сюръективный мономорфизм $\varphi : \mathfrak{A} \to \mathfrak{B}$, для которого φ^{-1} — гомоморфизм, называется *изоморфизмом* $\mathfrak{A}$ *на* $\mathfrak{B}$ и обозначается через $\varphi : \mathfrak{A} \xrightarrow{\sim} \mathfrak{B}$. Если существует изоморфизм $\varphi : \mathfrak{A} \xrightarrow{\sim} \mathfrak{B}$, то системы $\mathfrak{A}$ и $\mathfrak{B}$ называются *изоморфными* и обозначается это так: $\mathfrak{A} \simeq \mathfrak{B}$.

Таким образом, условие $\mathfrak{A} \simeq \mathfrak{B}$ означает, что существует биекция $\varphi : A \leftrightarrow B$, удовлетворяющая следующим условиям:

1) для любого функционального символа $f^{(n)} \in \Sigma$, соответствующих функций $f_{\mathfrak{A}}$ и $f_{\mathfrak{B}}$ в системах $\mathfrak{A}$ и $\mathfrak{B}$ и любых $a_1, a_2, \ldots \ldots, a_n \in A$ выполняется

$$\varphi(f_{\mathfrak{A}}(a_1, a_2, \ldots, a_n)) = f_{\mathfrak{B}}(\varphi(a_1), \varphi(a_2), \ldots, \varphi(a_n));$$

2) для любого предикатного символа $P^{(n)} \in \Sigma$, соответствующих предикатов $P_{\mathfrak{A}}$ и $P_{\mathfrak{B}}$ в системах $\mathfrak{A}$ и $\mathfrak{B}$ и любых $a_1, a_2, \ldots \ldots, a_n \in A$ выполняется

$$(a_1, a_2, \ldots, a_n) \in P_{\mathfrak{A}} \Leftrightarrow (\varphi(a_1), \varphi(a_2), \ldots, \varphi(a_n)) \in P_{\mathfrak{B}}.$$

Изоморфизм $\varphi : \mathfrak{A} \simeq \mathfrak{A}$ называется *автоморфизмом* системы $\mathfrak{A}$. Заметим, что, поскольку изоморфизм $\varphi : \mathfrak{A} \simeq \mathfrak{B}$ является биекцией $A \leftrightarrow B$, изоморфные системы равномощны.

Утверждение 2.2.1. 1. $\mathrm{id}_A : \mathfrak{A} \simeq \mathfrak{A}$.
2. *Если* $\varphi : \mathfrak{A} \simeq \mathfrak{B}$, *то* $\varphi^{-1} : \mathfrak{B} \simeq \mathfrak{A}$.
3. *Если* $\varphi : \mathfrak{A}_1 \simeq \mathfrak{A}_2$ *и* $\psi : \mathfrak{A}_2 \simeq \mathfrak{A}_3$, *то* $\varphi \circ \psi : \mathfrak{A}_1 \simeq \mathfrak{A}_3$.

Таким образом, отношение изоморфизма $\simeq$ является эквивалентностью на любом множестве алгебраических систем (отметим, что класс всех алгебраических систем не является множеством, поскольку не существует множества всех множеств). Это означает, что отношение изоморфизма разбивает множества алгебраических систем на классы эквивалентности, в каждом из которых содержатся системы, имеющие "одинаковое устройство". Это дает возможность переносить изучение свойств с одной системы на другую, изоморфную ей. Так, используя факт изоморфизма геометрического векторного пространства пространству строк, работу с геометрическими объектами можно свести к действиям с наборами чисел, что позволяет применять компьютеры.

Пример 2.2.2. 1. Рассмотрим множество векторов E_3 геометрического векторного пространства с операциями сложения векторов и умножения векторов на вещественные числа. Получим систему $\mathfrak{A} = \langle E_3; +, \{\lambda\cdot\}_{\lambda\in\mathbb{R}}\rangle$ бесконечной сигнатуры, где одноместные функции $\lambda\cdot$ ставят в соответствие вектору $\vec{a}$ вектор $\lambda\vec{a}$. Рассмотрим также систему $\mathfrak{B} = \langle \mathbb{R}^3; +, \{\lambda\cdot\}_{\lambda\in\mathbb{R}}\rangle$, носитель которой состоит из троек вещественных чисел (x, y, z), $+$ — двухместная операция покоординатного сложения троек, а функция $\lambda\cdot$ — операция умножения троек на число λ для всех вещественных чисел λ. Системы $\mathfrak{A}$ и $\mathfrak{B}$ являются линейными пространствами над полем $\mathbb{R}$. Отображение φ, ставящее в соответствие вектору $\vec{a} \in E_3$ его координатную строку (x, y, z) в некотором фиксированном базисе $\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3$, является биекцией ($\varphi : E_3 \leftrightarrow R^3$), при которой сохраняются действия операций: $\varphi(\vec{a} + \vec{b}) = \varphi(\vec{a}) + \varphi(\vec{b})$ и $\varphi(\lambda \cdot \vec{a}) = \lambda \cdot \varphi(\vec{a})$. Таким образом, φ — изоморфизм линейных пространств $\mathfrak{A}$ и $\mathfrak{B}$, и, следовательно, изучение геометрических векторов можно свести к изучению троек чисел и наоборот.

2. Рассмотрим два равномощных алфавита X, X' и алгебры $\mathfrak{A} = \langle W(X); \hat{}\rangle$, $\mathfrak{B} = \langle W(X'); \hat{}\rangle$ (см. пример 2.1.2). Покажем, что $\mathfrak{A} \simeq \mathfrak{B}$. Так как $|X| = |X'|$, то существует биекция $\varphi : X \leftrightarrow X'$. Построим по ней биекцию $\psi : W(X) \leftrightarrow W(X')$, при которой слову $\alpha \in W(X)$ ставится в соответствие слово $\beta \in W(X')$, получающееся заменой каждого символа x в слове α на символ $\varphi(x)$. Построенная биекция ψ дает

искомый изоморфизм $\mathfrak{A}$ на $\mathfrak{B}$, поскольку $\psi(\alpha_1\hat{\ }\alpha_2) = \psi(\alpha_1)\hat{\ }\psi(\alpha_2)$ для любых $\alpha_1, \alpha_2 \in W(X)$.

3. Для заданного множества U система $\langle \mathcal{P}(U); \cap, \cup, ^-, 0, 1\rangle$ изоморфна системе $\langle \mathcal{P}(U); \cup, \cap, ^-, 1, 0\rangle$ с биекцией $\varphi : A \mapsto \overline{A}$. Действительно, по законам де Моргана $\varphi(B \cap C) = \overline{B \cap C} = \overline{B} \cup \overline{C} = \varphi(B) \cup \varphi(C)$ и $\varphi(B \cup C) = \overline{B \cup C} = \overline{B} \cap \overline{C} = \varphi(B) \cap \varphi(C)$ для любых $B, C \in \mathcal{P}(U)$. Кроме того, $\varphi(\overline{A}) = \overline{\overline{A}} = \overline{\varphi(A)}$, $\varphi(0) = \overline{0} = 1$ и $\varphi(1) = \overline{1} = 0$.

4. Рассмотрим группы $\mathfrak{A} = \langle (0, \infty); \cdot\rangle$, $\mathfrak{B} = \langle \mathbb{R}; +\rangle$ и отображение $\varphi : (0, \infty) \to \mathbb{R}$ по правилу $\varphi(x) = \log_p(x)$ для некоторого фиксированного $p \in (0, \infty)$, $p \neq 1$. Отображение φ является изоморфизмом систем $\mathfrak{A}$ и $\mathfrak{B}$, называемым *логарифмом* (по основанию p). Это позволяет производить умножение положительных чисел при помощи сложения вещественных чисел на основании тождества $a \cdot b = \varphi^{-1}(\varphi(a) + \varphi(b))$, которое получается из равенства $\varphi(a \cdot b) = \varphi(a) + \varphi(b)$ применением отображения φ^{-1} к обеим частям.

§ 2.3. Подсистемы

Алгебраическая система $\mathfrak{A} = \langle A; \Sigma\rangle$ называется *подсистемой* системы $\mathfrak{B} = \langle B; \Sigma\rangle$ (обозначается через $\mathfrak{A} \subseteq \mathfrak{B}$), если выполняются следующие условия:

а) $A \subseteq B$;

б) для любого функционального символа $f^{(n)} \in \Sigma$, соответствующих функций $f_{\mathfrak{A}}$ и $f_{\mathfrak{B}}$ и любых элементов $a_1, a_2, \ldots, a_n \in A$ выполняется равенство $f_{\mathfrak{A}}(a_1, \ldots, a_n) = f_{\mathfrak{B}}(a_1, \ldots, a_n)$, т. е. интерпретации символа f действуют одинаково на элементах из A;

в) для любого предикатного символа $P^{(n)} \in \Sigma$, соответствующих предикатов $P_{\mathfrak{A}}$ и $P_{\mathfrak{B}}$ справедливо равенство $P_{\mathfrak{A}} = P_{\mathfrak{B}} \cap A^n$, т. е. предикат $P_{\mathfrak{A}}$ содержит в точности те кортежи отношения $P_{\mathfrak{B}}$, которые состоят из элементов множества A.

Если Σ — функциональная (предикатная) сигнатура, то подсистема $\mathfrak{A}$ алгебры (модели) $\mathfrak{B}$ называется *подалгеброй* (*подмоделью*).

Пример 2.3.1. 1. Если V' — подпространство линейного пространства V, то V' — подсистема (подалгебра) системы V.

2. Если $\Sigma = \{P^{(1)}\}$, $\mathfrak{B} = \langle B; \Sigma\rangle$ — система, $\varnothing \neq A \subseteq B$, то $\mathfrak{A} = \langle A; \Sigma\rangle$ является подсистемой системы $\mathfrak{B}$ тогда и только тогда, когда $P_{\mathfrak{A}} = P_{\mathfrak{B}} \cap A$.

Теорема 2.3.1. *Если $\mathfrak{B}$ — алгебраическая система, $X \subseteq B$, $X \neq \varnothing$, то существует единственная подсистема $\mathfrak{B}(X) \subseteq \mathfrak{B}$ с носителем $B(X)$, такая, что $X \subseteq B(X)$ и $\mathfrak{B}(X) \subseteq \mathfrak{A}$ для любой подсистемы $\mathfrak{A} \subseteq \mathfrak{B}$ с условием $X \subseteq A$.* $\square$

Подсистема $\mathfrak{B}(X)$ из теоремы 2.3.1 называется *подсистемой, порожденной множеством* X в $\mathfrak{B}$. Она является наименьшей подсистемой системы $\mathfrak{B}$, содержащей множество X.

П р и м е р 2.3.2. Если V — линейное пространство, S — некоторое непустое множество векторов пространства V, то линейная оболочка $\mathfrak{L}(S)$ множества S в V состоит из всевозможных линейных комбинаций векторов из S. Алгебра $\mathfrak{L}(S)$ является подалгеброй пространства V, порожденной множеством S. $\square$

Для описания устройства подсистемы $\mathfrak{B}(X)$ определим индукцией по построению понятие *терма* сигнатуры Σ:

1) переменные $x, y, z, \ldots$ и константные символы из Σ суть термы;

2) если $f \in \Sigma$ — n-местный функциональный символ, $t_1, t_2, \ldots, t_n$ — термы, то $f(t_1, \ldots, t_n)$ — терм;

3) никаких термов, кроме построенных по пп. 1, 2, нет.

Таким образом, термом является любое функциональное выражение, составленное с помощью переменных и (или) сигнатурных функциональных символов.

Множество всех термов сигнатуры Σ обозначается через $T(\Sigma)$.

П р и м е р 2.3.3. 1. Термами сигнатуры $\Sigma = \{+, \cdot, \leqslant, 0\}$ будут, например, 0, x, $x + y$, $z \cdot (x + z) + 0 \cdot y$, а $x + y \leqslant (0 + z) \cdot x$ термом не является.

2. Если $\Sigma = \{f, g, h\}$ — функциональная сигнатура, где $\mu(f) = 3$, $\mu(g) = 1$, $\mu(h) = 2$, то выражения $h(f(x_1, x_2, x_3), g(x_2))$, $g(f(h(x_1, x_2), x_1, g(x_2))$ — термы, а $h(x_1, f(x_1, x_3))$ не образует терма.

3. В сигнатуре $\Sigma = \{\text{отец}^{(1)}, \text{Иван}^{(0)}\}$ терм отец(отец(Иван)) можно проинтерпретировать как “дедушка Ивана”. $\square$

Пусть $t(x_1, x_2, \ldots, x_k)$ — терм из $T(\Sigma)$, все переменные которого содержатся среди $x_1, x_2, \ldots, x_k$; $\mathfrak{A} = \langle A; \Sigma \rangle$ — алгебраическая система. *Значение терма* t при значениях $a_1, a_2, \ldots, a_k \in A$ переменных $x_1, x_2, \ldots, x_k$ $(t(a_1, a_2, \ldots, a_k))$ определяется по индукции:

1) если t есть переменная x_i (константный символ c), то значение t есть a_i (c);

2) если терм t есть $f(t_1, \ldots, t_n)$, а значения $t_1, \ldots, t_n$ суть $b_1, \ldots, b_n$, то значение терма t есть $f(b_1, \ldots, b_n)$.

Теорема 2.3.2. *Если* $\mathfrak{B} = \langle B; \Sigma \rangle$ — *алгебраическая система,* $X \neq \varnothing$ *и* $X \subseteq B$, *то носитель подсистемы* $\mathfrak{B}(X)$ *равен* $\{t(a_1, \ldots, a_n) \mid t \in T(\Sigma), a_1, \ldots, a_n \in X\}$. $\square$

Таким образом, носитель подсистемы $\mathfrak{B}(X)$ состоит из всех элементов, которые получаются при подстановке элементов из X в термы.

П р и м е р 2.3.4. 1. Найдем носитель подсистемы $\mathfrak{B}(X)$ системы $\mathfrak{B} = \langle \mathbb{Q} \setminus \{0\}; \cdot \rangle$ для множества $X = \{\frac{1}{2}\}$. Так как сигнатура Σ системы $\mathfrak{B}$ есть $\{\cdot\}$, то $T(\Sigma) = \{x_1, x_1 \cdot x_2, (x_1 \cdot x_2) \cdot x_3, x_1 \cdot (x_2 \cdot \cdot x_3), \ldots\}$. По теореме 2.3.2 получаем $B(X) = \{\frac{1}{2}, \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2}, \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2}, \ldots\} = = \{\frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \frac{1}{8}, \frac{1}{16}, \ldots\} = \{\frac{1}{2^n} \mid n \geqslant 1\}$.

2. Если $\mathfrak{B} = \langle \mathbb{Q} \setminus \{0\}; \cdot, : \rangle$, $X = \{\frac{1}{2}\}$, то, поскольку по сравнению с предыдущим примером сигнатура дополняется операцией деления $x : y$, множество $B(X)$ содержит также числа $\frac{1}{2^n} : \frac{1}{2^m} = 2^{m-n}$, $m, n \geqslant 1$, т. е. $C = \{2^n | n \in \mathbb{Z}\} \subseteq B(X)$. Так как множество C замкнуто относительно операций умножения и деления, т. е. $\langle C; \Sigma \rangle$ является подсистемой системы $\mathfrak{B}$ и содержит множество X, то $B(X) \subseteq C$. Следовательно, $B(X) = C$.

3. Найдем носитель подсистемы $\mathfrak{B}(X)$ системы $\mathfrak{B} = \langle \mathbb{C}; +, i \rangle$ для множества $X = \{-2, 2\}$. Так как все термы из $T(\Sigma)$ являются переменными, константой i или образуются из переменных и константы i с помощью операции сложения, то каждый элемент из $B(X)$ получается подстановкой элементов из X в некоторый терм $x_1 + x_2 + \ldots + x_m + i + i + \ldots + i$. Следовательно, $B(X) = \{2m + ni \mid m \in \mathbb{Z}, n \in \omega\}$.

§ 2.4. Конгруэнции. Фактор-алгебры. Теорема о гомоморфизме

Конгруэнцией на алгебре $\mathfrak{A} = \langle A; \Sigma \rangle$ называется такое отношение эквивалентности $\theta \subseteq A^2$, при котором для любого $n \in \omega$, любого n-местного символа $f \in \Sigma$ (напомним, что сигнатура алгебры состоит только из функциональных символов), произвольных наборов $(a_1, a_2, \ldots, a_n)$, $(b_1, b_2, \ldots, b_n) \in A^n$, если $a_1 \,\theta\, b_1$, $a_2 \,\theta\, b_2, \ldots, a_n \,\theta\, b_n$, то $f(a_1, a_2, \ldots, a_n) \,\theta\, f(b_1, b_2, \ldots, b_n)$.

Это означает, что все операции согласованы с отношением эквивалентности θ. Например, для операции сложения это выглядит так: для любых элементов $x, y \in A$, любых $a \in \theta(x)$, $b \in \theta(y)$ элемент $a + b$ принадлежит классу $\theta(x + y)$.

Рассмотрим фактор-множество множества A по конгруэнции θ: $A/\theta = \{\theta(x) | x \in A\}$. Определим на этом множестве алгебру сигнатуры Σ. Константе c алгебры A поставим в соответствие элемент $\theta(c)$, который в A/θ будет интерпретировать константный символ c. Если f — n-местный символ из Σ, то зададим на множестве A/θ действие функции f по правилу

$$f(\theta(x_1), \ldots, \theta(x_n)) \rightleftharpoons \theta(f(x_1, \ldots, x_n)).$$

Убедимся, что для любых $x_1, \ldots, x_n \in A$ это определение коррект-

$$\begin{tikzcd}
\mathfrak{A} \arrow[r, "\varphi"] \arrow[d, "\psi"'] & \mathfrak{B} \arrow[dl, dashed, "\simeq"', "\chi"] \\
\mathfrak{A}/\mathrm{Ker}\,\varphi &
\end{tikzcd}$$

Рис. 2.1

но, т. е. не зависит от выбора представителей классов эквивалентности. Действительно, если $\theta(x_i) = \theta(y_i)$, $i = 1, 2, \ldots, n$, то $x_i \,\theta\, y_i$, откуда в силу свойства конгруэнции имеем

$$f(x_1, \ldots, x_n) \,\theta\, f(y_1, \ldots, y_n),$$

т. е. $\theta(f(x_1, \ldots, x_n)) = \theta(f(y_1, \ldots, y_n))$.

Получившаяся алгебра $\mathfrak{A}/\theta \rightleftharpoons \langle A/\theta; \Sigma\rangle$ называется *фактор-алгеброй* алгебры $\mathfrak{A}$ по конгруэнции θ.

Очевидно, что отображение $A \to A/\theta$, при котором элементу $x \in A$ ставится в соответствие класс $\theta(x)$, является эпиморфизмом алгебры $\mathfrak{A}$ на фактор-алгебру $\mathfrak{A}/\theta$. Этот эпиморфизм называется *естественным* гомоморфизмом.

Если $\varphi : \mathfrak{A} \to \mathfrak{B}$ — гомоморфизм алгебр, то множество $\mathrm{Ker}\,\varphi \rightleftharpoons \{(a, a')|\varphi(a) = \varphi(a')\}$ оказывается конгруэнцией на алгебре $\mathfrak{A}$ и называется *ядром* гомоморфизма φ.

Следующая теорема утверждает, что гомоморфный образ алгебры изоморфен фактор-алгебре по ядру гомоморфизма.

Теорема 2.4.1 (теорема о гомоморфизме). *Если $\varphi : \mathfrak{A} \to \to \mathfrak{B}$ — эпиморфизм, $\psi : \mathfrak{A} \to \mathfrak{A}/\mathrm{Ker}\,\varphi$ — естественный гомоморфизм, то существует изоморфизм $\chi : \mathfrak{B} \simeq \mathfrak{A}/\mathrm{Ker}\,\varphi$ такой, что $\varphi \circ \chi = \psi$.* $\square$

Отображения φ, ψ и χ из теоремы 2.4.1 можно представить диаграммой, показанной на рис. 2.1.

§ 2.5. Решетки и булевы алгебры

Следующей нашей целью является определение и изучение понятия булевой алгебры, но сначала рассмотрим более общее понятие — понятие решетки.

Решеткой называется ч.у.м. $\mathfrak{A} = \langle A; \leqslant\rangle$, в котором каждая пара элементов имеет супремум и инфимум. Для заданных элементов

$x, y \in A$ элемент $\inf\{x, y\}$ называется *пересечением* элементов x и y (обозначается $x \wedge y$), а $\sup\{x, y\}$ называется *объединением* элементов x и y (обозначается $x \vee y$).

Заметим, что если в системе $\mathfrak{A}$ введены операции $\wedge$ и $\vee$, то отношение $\leqslant$ можно по этим операциям восстановить следующим образом: $x \leqslant y \Leftrightarrow x \wedge y = x$, а также $x \leqslant y \Leftrightarrow x \vee y = y$.

Наименьший (наибольший) элемент решетки, если он существует, называется *нулем* (*единицей*). Обозначаются эти элементы соответственно через 0 и 1. В конечных решетках всегда имеются нуль и единица.

П р и м е р 2.5.1. 1. Любое конечное линейно упорядоченное множество является решеткой.

2. Рассмотрим ч.у.м. $\mathfrak{A} = \langle\{a, b, c, d, e\}; \leqslant\rangle$, в котором $a < b$, $a < c$, $a < d$, $b < e$, $c < e$, $d < e$, а элементы b, c, d попарно несравнимы. Система $\mathfrak{A}$ образует решетку, показанную на рис. 2.2. В этой решетке $a = 0$, $e = 1$.

3. Если $|A| > 1$, то ч.у.м. $\langle A; \mathrm{id}_A\rangle$ не является решеткой, поскольку для любых различных элементов x и y не определены операции $\inf\{x, y\}$ и $\sup\{x, y\}$ по отношению id_A. $\square$

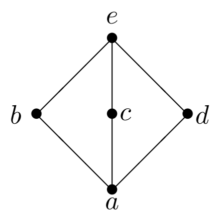


Рис. 2.2

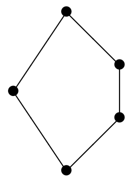


Рис. 2.3

Решетка $\mathfrak{A} = \langle A; , \leqslant\rangle$ называется *дистрибутивной*, если она подчиняется дистрибутивным законам $x \vee (y \wedge z) = (x \vee y) \wedge (x \vee z)$, $x \wedge (y \vee z) = (x \wedge y) \vee (x \wedge z)$ для всех $x, y, z \in A$.

Не все решетки являются дистрибутивными. Решетка M_3, изображенная на рис. 2.2, не дистрибутивна, поскольку $b \wedge (d \vee c) = b \wedge e = b$, тогда как $(b \wedge d) \vee (b \wedge c) = a \vee a = a$. Недистрибутивной является также решетка P_5, изображенная на рис. 2.3.

Теорема 2.5.1. *Решетка* $\mathfrak{A} = \langle A; , \leqslant\rangle$ *дистрибутивна тогда и только тогда, когда* $\mathfrak{A}$ *не имеет подрешеток, изоморфных* M_3 *или* P_5.

Дистрибутивная решетка $\mathfrak{A} = \langle A; \leqslant\rangle$ называется *булевой алгеброй*, если $\mathfrak{A}$ имеет нуль 0, единицу 1, $0 \neq 1$ и для любого элемента $x \in A$ найдется элемент $\overline{x}$ (называемый *дополнением* элемента x) такой, что $x \vee \overline{x} = 1$ и $x \wedge \overline{x} = 0$.

Предложение 2.5.2. *Если* $\mathfrak{A}$ *— булева алгебра, то для любого элемента* x *дополнение* $\overline{x}$ *единственно.* $\square$

Таким образом, булеву алгебру можно представить в виде алгебры $\mathfrak{B} = \langle B; \wedge, \vee, ^{-}, 0, 1\rangle$ с двумя двухместными операциями пересечения

$\wedge$ и объединения $\vee$, одноместной операцией дополнения ($x \mapsto \overline{x}$) и двумя константами 0 и 1.

П р и м е р 2.5.2. 1. Если на множестве $\{0, 1\}$ задать линейный порядок с условием $0 < 1$, то получим двухэлементную булеву алгебру $\langle\{0, 1\}; \wedge, \vee, ^{-}, 0, 1\rangle$.

2. Рассмотрим множество $A = \{0, a, b, 1\}$ и зададим частичный порядок $\leqslant$ на A следующим образом: $0 < a$, $0 < b$, $a < 1$, $b < 1$, а элементы a и b несравнимы (рис. 2.4). Система $\langle A; \leqslant\rangle$ является булевой алгеброй, в которой $\overline{a} = b$, $\overline{b} = a$.

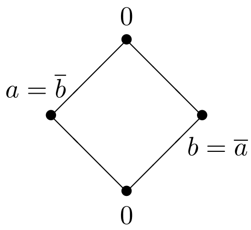


Рис. 2.4

3. Алгебра Кантора $\langle\mathcal{P}(U); \cap, \cup, ^{-}, \varnothing, U\rangle$ является булевой алгеброй. $\square$

Оказывается, что основные свойства операций $\cap$, $\cup$, $^{-}$ из § 1.1 выполняются в любой булевой алгебре.

Теорема 2.5.3. *Если* $\mathfrak{B} = \langle B; \wedge, \vee, ^{-}, 0, 1\rangle$ *— булева алгебра, то в* $\mathfrak{B}$ *выполняются следующие законы для любых* $x, y, z \in B$*:*

1) *ассоциативность операций* $\vee$ *и* $\wedge$*:*

$$x \vee (y \vee z) = (x \vee y) \vee z,\ x \wedge (y \wedge z) = (x \wedge y) \wedge z;$$

2) *коммутативность операций* $\vee$ *и* $\wedge$*:*

$$x \vee y = y \vee x,\ x \wedge y = y \wedge x;$$

3) *законы идемпотентности*

$$x \vee x = x,\ x \wedge x = x;$$

4) *законы дистрибутивности*

$$x \vee (y \wedge z) = (x \vee y) \wedge (x \vee z),$$

$$x \wedge (y \vee z) = (x \wedge y) \vee (x \wedge z);$$

5) *законы поглощения*

$$x \vee (x \wedge y) = x,\ x \wedge (x \vee y) = x;$$

6) *законы де Моргана*

$$\overline{x \vee y} = \overline{x} \wedge \overline{y},\ \overline{x \wedge y} = \overline{x} \vee \overline{y};$$

7) *законы нуля и единицы*

$$x \vee 0 = x,\ x \wedge 0 = 0,\ x \vee 1 = 1,\ x \wedge 1 = x,$$

$$x \vee \overline{x} = 1,\ x \wedge \overline{x} = 0,\ 0 \neq 1;$$

8) *закон двойного отрицания*

$$\overline{\overline{x}} = x.\ \square$$

В следующей теореме описываются все конечные булевы алгебры с точностью до изоморфизма.

Теорема 2.5.4 (теорема Стоуна). *Любая конечная булева алгебра изоморфна некоторой алгебре Кантора.*

Так как для любого множества U мощность множества $\mathcal{P}(U)$ равна $2^{|U|}$, то из теоремы Стоуна вытекает

Следствие 2.5.5. *Любые две конечные булевы алгебры, имеющие одинаковое число элементов, изоморфны. Число элементов конечной булевой алгебры равно 2^n для некоторого $n \in \omega \setminus \{0\}$.*

Таким образом, конечная булева алгебра определяется однозначно с точностью до изоморфизма числом своих элементов.

Аналогично примеру 2.2.2 булевы алгебры $\langle B; \wedge, \vee, \bar{\ }, 0, 1\rangle$ и $\langle B; \vee, \wedge, \bar{\ }, 1, 0\rangle$ изоморфны посредством изоморфизма $\varphi : B \to B$, в котором $\varphi(x) = \overline{x}$. На этом основан следующий

принцип двойственности для булевых алгебр: если в справедливом утверждении о булевых алгебрах, касающемся отношения $\leqslant$ и операций $\wedge$, $\vee$, $\bar{\ }$, 0, 1, всюду заменить $\leqslant$ на $\geqslant$, $\wedge$ — на $\vee$, $\vee$ — на $\wedge$, 0 — на 1, 1 — на 0, то получится также справедливое утверждение. Образованное таким образом утверждение называется *двойственным к исходному*.

П р и м е р 2.5.3. Закон де Моргана $\overline{x \wedge y} = \overline{x} \vee \overline{y}$ является двойственным по отношению к закону де Моргана $\overline{x \vee y} = \overline{x} \wedge \overline{y}$, а закон $x \wedge \overline{x} = 0$ — к закону $x \vee \overline{x} = 1$. $\square$

Остановимся на связи булевых алгебр с кольцами. Кольцо $\langle R; +, \cdot\rangle$ называется *булевым*, если $a^2 = a$ для всех $a \in R$.

Предложение 2.5.6. *Булево кольцо $\langle R; +, \cdot\rangle$ коммутативно, и $a + a = 0$ для всех элементов $a \in R$.* $\square$

Напомним, что единицей кольца R называется такой элемент e, что $a \cdot e = e \cdot a = a$ для всех $a \in R$.

Пусть $\mathfrak{B} = \langle B; \wedge, \vee, \bar{\ }, 0, 1\rangle$ — булева алгебра. Определим операции *кольцевых сложения* и *умножения* на $\mathfrak{B}$ по следующим правилам: $x \oplus y \rightleftharpoons (x \wedge \overline{y}) \vee (\overline{x} \wedge y)$, $x \odot y \rightleftharpoons x \wedge y$ для всех $x, y \in B$. Операция $\oplus$ соответствует кольцевой сумме множеств, операция $\odot$ — пересечению множеств (см. § 1.1).

Теорема 2.5.7. *Система $\langle B; \oplus, \odot\rangle$ является булевым кольцом с единицей* 1. $\square$

Имея булево кольцо с единицей $\langle B; \oplus, \odot\rangle$, можно однозначно восстановить операции $\wedge$, $\vee$, $\bar{\ }$ по следующим правилам: $x \wedge y = = x \odot y$, $x \vee y = x \oplus y \oplus (x \odot y)$, $\overline{x} = 1 \oplus x$.

§ 2.6. Алгебры отношений и реляционные алгебры

Важным классом алгебраических систем являются алгебры отношений и их расширения — реляционные алгебры.

Рассмотрим *алгебру отношений*, носителем которой является множество отношений $\mathfrak{R} = \{P_1, P_2, \ldots, P_m, \ldots\}$, а сигнатура Σ состоит из символов частичных двухместных операций объединения $\cup$, пересечения $\cap$, разности $\setminus$ и декартова произведения $\times$ отношений.

Отношения P_i и P_j называются *совместимыми*, если P_i, $P_j \subseteq A^n$ для некоторого множества A и числа $n \in \omega$.

Объединением $P_i \cup P_j$ двух совместимых отношений P_i и P_j называется множество всех кортежей, каждый из которых принадлежит хотя бы одному из этих отношений: $P_i \cup P_j = \{X \mid X \in P_i$ или $X \in P_j\}$. *Пересечением* $P_i \cap P_j$ двух совместимых отношений P_i и P_j называется множество всех кортежей, принадлежащих как отношению P_i, так и отношению P_j: $P_i \cap P_j = \{X \mid X \in P_i$ и $X \in P_j\}$. *Разностью* $P_i \setminus P_j$ двух совместимых отношений P_i и P_j называется множество всех кортежей, принадлежащих отношению P_i и не принадлежащих отношению P_j: $P_i \setminus P_j = \{X \mid X \in P_i$ и $X \notin P_j\}$.

П р и м е р 2.6.1. Если $P = \{(a,b,d),(b,c,e)\}$, $Q = \{(a,b,d),(b,d,e)\}$, то $P \cup Q = \{(a,b,d),(b,c,e),(b,d,e)\}$, $P \cap Q = \{(a,b,d)\}$, $P \setminus Q = \{(b,c,e)\}$. $\square$

Декартовым произведением $P_i \times P_j$ двух отношений P_i и P_j называется множество всех кортежей Z таких, что Z — конкатенация $Z = X\hat{\ }Y$ кортежей $X \in P_i$ и $Y \in P_j$, где $X\hat{\ }Y = = (x_1, \ldots, x_r, y_1, \ldots, y_s)$, если $X = (x_1, \ldots, x_r)$, $Y = (y_1, \ldots, y_s)$. Итак, $P_i \times P_j = \{X\hat{\ }Y \mid X \in P_i, Y \in P_j\}$.

П р и м е р 2.6.2. Если $P = \{(a,b),\ (b,c)\}$, $Q = \{(b,c,a),\ (c,a,a)\}$, то $P \times Q = \{(a,b,b,c,a),\ (a,b,c,a,a),\ (b,c,b,c,a),\ (b,c,c,\ a,a)\}$. $\square$

Алгебры отношений находят применение при формализации реальных объектов. Рассмотрим, как используется алгебра отношений при создании информационного обеспечения — разработке реляционной базы данных. Основой построения реляционной базы данных является двумерная таблица, каждый i-й столбец которой соответствует i-му домену (если n-местное отношение R_n содержится в $D_1 \times D_2 \times \ldots D_n$, то i-м *доменом* отношения R_n, где $i = 1, \ldots, n$, называется множество D_i), строка — кортежу значений доменов, находящихся в отношении R_n.

П р и м е р 2.6.3. Рассмотрим 4-местное отношение R_4 (расписание экзаменов) (табл. 2.1).

Таблица 2.1

R_4	D_1	D_2	D_3	D_4
1	A-1	Информатика	10 января	Ауд. 320
2	A-2	Физика	10 января	Ауд. 324
3	A-2	Анализ	15 января	Ауд. 324
4	A-1	Физика	16 января	Ауд. 320
5	A-1	Анализ	21 января	Ауд. 324
6	A-2	Информатика	21 января	Ауд. 320

Таблица 2.2

R'_4	D_1	D_2	D_3	D_4
2	A-2	Физика	10 января	Ауд. 324
4	A-1	Физика	16 января	Ауд. 320

Отношение R_4 является подмножеством декартова произведения $D_1 \times D_2 \times D_3 \times D_4$, и поэтому каждое из множеств D_i является доменом:

— домен D_1 (группа) содержит значения A-1, A-2: $D_1 = \{A\text{-1}, A\text{-2}\}$;

— домен D_2 (дисциплина) — $D_2 = \{$Информатика, Физика, Анализ$\}$;

— домен D_3 (дата) — $D_3 = \{$10 янв., 15 янв., 16 янв., 21 янв.$\}$;

— домен D_4 (аудитория) — $D_4 = \{$Ауд. 320, Ауд. 324$\}$.

Порядок столбцов в таблице фиксирован, строки в общем случае могут располагаться произвольно. Цифры первого столбца $1, 2, \ldots, 6$ являются *идентификаторами* отношения R_4. $\square$

Итак, каждому отношению можно поставить в соответствие таблицу.

Для преобразования отношений определим *реляционную алгебру*. Носитель реляционной алгебры представляет собой множество отношений $\mathfrak{R}$, а набор операций кроме введенных операций $\cup, \cap, \setminus, \times$ включает специальные операции над отношениями: выбор, проекцию и соединение.

Операция выбора представляет собой процедуру построения "горизонтального" подмножества отношения, т. е. подмножества кортежей, обладающих заданным свойством.

П р и м е р 2.6.4. С помощью операции выбора построим из отношения R_4 (расписание экзаменов) отношение R'_4 (расписание экзаменов по физике). Результатом операции выбора являются строки, в которых домен D_2 представлен значением "Физика", это 2-я и 4-я строки (табл. 2.2). $\square$

Таблица 2.3

$\pi_{2,3}^{R_4}$	D_2	D_3
1	Информатика	10 января
2	Физика	10 января
3	Анализ	15 января
4	Физика	16 января
5	Анализ	21 января
6	Информатика	21 января

Результатом операции *проекции* отношения $R_n \subseteq A_1 \times A_2 \times \ldots \times A_n$ на $A_{i_1}, A_{i_2}, \ldots, A_{i_m}$, где $\{i_1, \ldots, i_m\} \subseteq \{1, 2, \ldots, n\}$, $i_j < i_k$ при $j < k$, называется множество

$$\pi_{i_1,i_2,\ldots,i_m}^{R_n} \rightleftharpoons \{(a_{i_1}, a_{i_2}, \ldots, a_{i_m}) \mid (a_1, a_2, \ldots, a_n) \in R_n\}.$$

Например, $\pi_1^{R_n} \rightleftharpoons \{a_1 \mid (a_1, a_2, \ldots, a_n) \in R_n\}$.

Операция проекции определяет построение "вертикального" подмножества отношения, т. е. из кортежей удаляются координаты, соответствующие невыделенным доменам.

П р и м е р 2.6.5. Проекция $\pi_{2,3}^{R_4}$ отношения R_4 из примера 2.6.3 определяет множество пар, каждая из которых содержит название дисциплины и дату (табл. 2.3). □

Операция соединения по двум таблицам, имеющим общий домен, позволяет построить одну таблицу, каждая строка которой образуется соединением двух строк исходных таблиц. Из заданных таблиц берут строки, содержащие одно и то же значение общего домена; общему домену ставится в соответствие один столбец.

Таблица 2.4

R_4	D_1	D_2	D_3	D_4
1	A-1	Информатика	10 января	Ауд. 320
2	A-2	Физика	10 января	Ауд. 324

Таблица 2.5

R_4'	D_1	D_2	D_3	D_4
1	A-2	Анализ	15 января	Ауд. 324
2	A-1	Физика	16 января	Ауд. 320

Таблица 2.6

R_7	D_1	D_2	D_3	D_4	D_2'	D_3'	D_4'
1	A-1	Информатика	10 янв.	Ауд.320	Физика	16 янв.	Ауд.320
2	A-2	Физика	10 янв.	Ауд.324	Анализ	15 янв.	Ауд.324

Пример 2.6.6. Найдем по двум заданным таблицам (табл. 2.4, 2.5) результат соединения по домену D_1 (табл. 2.6). □

§ 2.7. Задачи и упражнения

1. Установить, образуют ли алгебры следующие системы:
   а) $\langle\omega; +, -\rangle$, б) $\langle\mathbb{Z}; :, \cdot\rangle$, в) $\langle\mathbb{R}; \cdot, -, 1-2i\rangle$.

2. Обозначим через $\mathcal{F}$ множество функций, действующих на множестве A. Образует ли система $\langle\mathcal{F}; \circ\rangle$: а) полугруппу, б) моноид, в) группу?

3. Построить изоморфизм систем $\langle\{1,2,3,4\}; \{(1,3), (1,4), (4,2), (3,2)\}\rangle$ и $\langle\{a, b, c, d\}; \{(b,a), (c,b), (c,d), (d,a)\}\rangle$. Построить все гомоморфные образы указанных систем.

4. Построить всевозможные попарно неизоморфные группы с двухэлементным носителем.

5. Рассмотрим алгебру $\mathfrak{A} = \langle\{a,b,c,d\}; \cdot\rangle$, определенную следующей таблицей Кэли:

$\cdot$	a	b	c	d
a	a	a	b	a
b	c	d	a	b
c	a	c	d	d
d	d	a	d	a

   Имеет ли алгебра $\mathfrak{A}$ подалгебру с носителем: а) $\{a,b,c\}$; б) $\{a\}$; в) $\{a,d\}$?

6. Являются ли термами сигнатуры $\Sigma = \{f^{(1)}, g^{(2)}, h^{(3)}\}$ следующие выражения:
   а) $f(g(x,y))$; б) $g(f(x), h(x,y,z))$; в) $f(g(x), h(x,y,z))$?

7. Указать алгоритм построения всех термов сигнатуры Σ от переменной x, если: а) $\Sigma = \{f^{(1)}\}$ и б) $\Sigma = \{g^{(2)}\}$.

8. Построить подсистему $\mathfrak{B}(X)$, порожденную данным множеством X:
   а) $\mathfrak{B} = \langle \mathbb{R}; \sqrt[3]{\ } \rangle$, $X = \{2\}$; б) $\mathfrak{B} = \langle \omega; + \rangle$, $X = \{2, 3\}$;
   в) $\mathfrak{B} = \langle \mathbb{C}; \cdot \rangle$, $X = \{i\}$; г) $\mathfrak{B} = \langle \mathbb{C}; \cdot, 2 \rangle$, $X = \{i\}$.
9. Рассмотрим алгебру $\mathfrak{A} = \langle \{a, b, c, d, e\}; \cdot \rangle$, определенную следующей таблицей Кэли:

$\cdot$	a	b	c	d	e
a	c	d	a	b	e
b	d	c	b	b	e
c	a	a	b	a	c
d	b	a	a	b	d
e	a	b	e	e	c

   Какое из следующих разбиений образует конгруэнцию на алгебре $\mathfrak{A}$:
   а) $\{\{a, b, c\}, \{d, e\}\}$; б) $\{a, b\}, \{c, d\}, \{e\}\}$?
   Построить фактор-алгебру алгебры $\mathfrak{A}$ по найденной конгруэнции.
10. Доказать, что любое л.у.м. является решеткой.
11. Доказать, что в решетке максимальный элемент является наибольшим, а минимальный — наименьшим.
12. Построить пример решетки с наибольшим элементом, но без наименьшего.
13. Построить булеву алгебру подмножеств трехэлементного (четырехэлементного) множества.
14. Для терма $\overline{x \vee (y \wedge \overline{z})}$ булевой алгебры найти соответствующий терм в булевом кольце.

После изучения главы 2 выполняются задачи 6 и 7 контрольной работы. Задача 6 решается аналогично примеру 2.1.1, а задача 7 — аналогично примеру 2.3.4.

Г л а в а 3

ЭЛЕМЕНТЫ ТЕОРИИ ГРАФОВ

§ 3.1. Виды и способы задания графов

Во многих прикладных задачах изучаются системы связей между различными объектами. Объекты называются *вершинами* и отмечаются точками, а связи между вершинами называются *дугами* и отмечаются стрелками между соответствующими точками (рис. 3.1).

Такие системы и образуют графы. Граф может изображать сеть улиц в городе: вершины графа — перекрестки, а дуги — улицы с разрешенным направлением движения (улицы могут быть с односторонним и двусторонним движением). В виде графов можно представить блок-схемы программ (вершины — блоки, а дуги — разрешенные переходы от одного блока к другому), электрические цепи, географические карты и молекулы химических соединений, связи между людьми и группами людей. Перейдем к точным определениям.

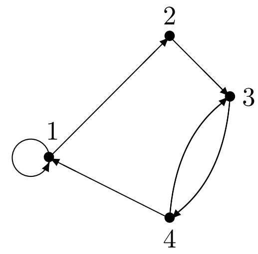


Рис. 3.1

Графом называется алгебраическая система $G = \langle M; R\rangle$, где R — двухместный предикатный символ. Элементы носителя M называются *вершинами* графа G, а элементы бинарного отношения $R \subseteq M^2$ — *дугами*. Таким образом, дугами являются пары вершин $(a, b) \in R$. При этом дуга (a, b) называется *исходящей из вершины* a и *заходящей в вершину* b.

Изображение графа $G = \langle M; R\rangle$ получается путем расположения различных точек на плоскости для каждой вершины $a \in M$, причем если $(a, b) \in R$, то проводится стрелка (дуга) из вершины a к вершине b.

П р и м е р 3.1.1. Изображение графа G с множеством вершин $M = \{1, 2, 3, 4\}$ и множеством дуг $R = \{(1, 1), (1, 2), (2, 3), (3, 4), (4, 3), (4, 1)\}$ представлено на рис. 3.1. $\square$

При задании графа для нас не имеет значения природа связи между вершинами a и b, важно только то, что связь существует и информация о связях содержится во множестве дуг R. Однако часто возникают ситуации, при которых такой информации оказывается недостаточно, например, в случаях, когда имеется несколько дуг, исходящих из вершины a и заходящих в вершину b. Такие дуги называются *кратными* (рис. 3.2). Тогда используется понятие мультиграфа.

Мультиграфом G называется тройка $\langle M, U, P\rangle$, в которой M — множество вершин, U — множество дуг, а $P \subseteq M \times U \times M$ — трехместный предикат, называемый *инцидентором* и представляемый следующим образом: $(a, u, b) \in P$ тогда и только тогда, когда дуга u исходит из вершины a и заходит в вершину b. Отметим, что любой граф можно представить в виде мультиграфа.

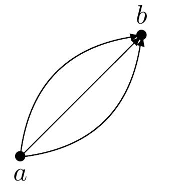


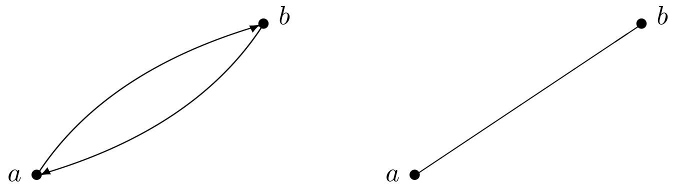
Рис. 3.2

Граф $G = \langle M; R\rangle$ называется *ориентированным* (*орграфом*), если найдется дуга $(a, b) \in R$ такая, что $(b, a) \notin R$. Если же отношение R симметрично, т. е. из $(a, b) \in R$ следует $(b, a) \in R$, то граф G называется *неориентированным* (*неорграфом*). Если одновременно пары (a, b) и (b, a) принадлежат R (рис. 3.3*а*), то информацию об этих дугах можно представить множеством $[a, b] = \{(a, b), (b, a)\}$, называемым *ребром*, которое соединяет вершины a и b. При этом вершины a и b называются *концами ребра* $[a, b]$. Ребра изображаются линиями (без стрелок), соединяющими вершины (рис. 3.3*б*).

Если в мультиграфе вместо дуг рассматриваются ребра, то мультиграф также называется *неориентированным*. Отметим, что если в орграфе $G = \langle M; R\rangle$ к каждой дуге $(a, b) \in R$ добавить пару (b, a), то в результате образуется неорграф , который будем называть *соответствующим данному орграфу* G и обозначать через $F(G)$.

П р и м е р 3.1.2. Орграфу G, изображенному на рис. 3.1, соответствует неорграф $F(G)$, изображенный на рис. 3.4. $\square$

Введенные в § 2.2 понятия морфизмов алгебраических систем для графов представляются следующим образом. Пусть $G = \langle M; R\rangle$, $G' = \langle M'; R'\rangle$ — графы. Тогда отображение $\varphi : M \to M'$ является гомоморфизмом, если для любых вершин $a, b \in M$ из $(a, b) \in R$



а *б*

Рис. 3.3

следует $(\varphi(a), \varphi(b)) \in R'$. Биекция $\varphi : M \leftrightarrow M'$ является изоморфизмом графов, если $(a, b) \in R \Leftrightarrow (\varphi(a), \varphi(b)) \in R'$.

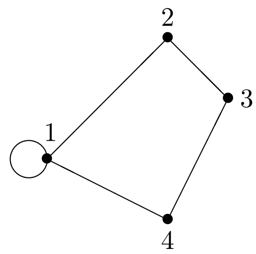


Рис. 3.4

П р и м е р 3.1.3. Рассмотрим граф G, состоящий из множества вершин $\{1, 2, 3, 4\}$ и множества дуг $[1, 2] \cup [3, 4] \cup \{(1, 3),\ (2, 4),\ (3, 2), (4, 1)\}$ (рис. 3.5*а*). Граф $G' = \langle\{a, b, c\}; [a, b] \cup [b, c] \cup \{(a, c), (b, b)\}\rangle$ является гомоморфным образом графа G при гомоморфизме φ, в котором $\varphi(1) = a$, $\varphi(2) = b$, $\varphi(3) = c$, $\varphi(4) = b$ (рис. 3.5*б*). Граф G'', показанный на рис. 3.5*в*, изоморфен графу G посредством изоморфизма ψ, при котором $\psi(1) = a$, $\psi(2) = = b$, $\psi(3) = c$, $\psi(4) = d$. Отображение $\chi : \{1, 2, 3, 4\} \leftrightarrow \{1, 2, 3, 4\}$, при котором $\chi(1) = 2$, $\chi(2) = 1$, $\chi(3) = 4$, $\chi(4) = 3$, является автоморфизмом графа G. $\square$

Информация о структуре графа может быть задана матрицей бинарного отношения. Пусть $G = \langle M; R\rangle$ — граф, в котором множество вершин имеет n элементов: $M = \{a_1, a_2, \ldots, a_n\}$. *Матрицей смежности* $A_G = (A_{ij})$ графа G называется матрица порядка n, определенная следующим образом:

$$A_{ij} \rightleftharpoons \begin{cases} 1, & \text{если } (a_i, a_j) \in R, \\ 0, & \text{если } (a_i, a_j) \notin R. \end{cases}$$

Если $A_{ij} = 1$, то вершина a_j называется *последователем вершины* a_i, а a_i — *предшественником* a_j. Вершины a_i и a_j называются *смежными*, если $A_{ij} = 1$ или $A_{ji} = 1$.

Если G — мультиграф, то в матрице смежности A_G элемент A_{ij} по определению равен числу дуг, исходящих из вершины a_i и заходящих в вершину a_j $(i, j \in \{1, \ldots, n\})$.

П р и м е р 3.1.4. Граф G, изображенный на рис. 3.6, имеет матрицу смежности

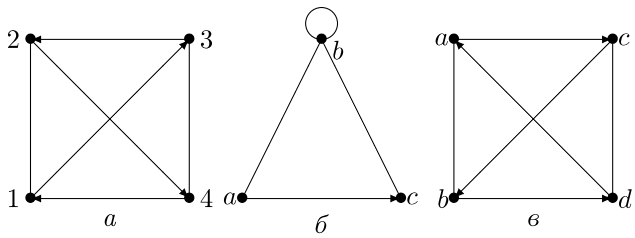


Рис. 3.5

$$A_G = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}. \square$$

Отметим, что если G — неорграф, то матрица смежности A_G симметрична, т. е. не меняется при транспонировании: $A_G^{\mathrm{T}} = A_G$.

Петлей в графе G называется дуга, соединяющая вершину саму с собой. Если G — граф без петель, то в матрице смежности A_G по главной диагонали стоят нулевые элементы.

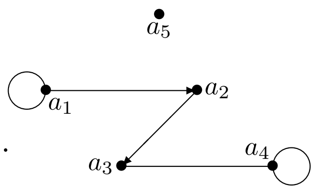


Рис. 3.6

Пусть $G_1 = \langle M_1; R_1 \rangle$, $G_2 = \langle M_2; R_2 \rangle$ — графы, в которых $M_1 = \{a_1, \ldots, a_n\}$, $M_2 = \{b_1, \ldots, b_n\}$. Если φ — изоморфизм графов G_1 и G_2, действующий по правилу $\varphi(a_i) = b_i$, $i = 1, \ldots, n$, то матрицы смежности A_{G_1} и A_{G_2} совпадают. В общем случае справедлива

Теорема 3.1.1. *Графы изоморфны тогда и только тогда, когда их матрицы смежности получаются друг из друга одновременными перестановками строк и столбцов (т.е. одновременно с перестановкой i-й и j-й строк переставляются i-й и j-й столбцы).*

Согласно этой теореме по матрице смежности граф восстанавливается однозначно с точностью до изоморфизма.

В мультиграфе $G = \langle M, U, P \rangle$ дуга $u \in U$ называется *инцидентной вершине* $a \in M$, если $(a, u, b) \in P$ или $(b, u, a) \in P$ для некоторого $b \in M$. Если $M = \{a_1, \ldots, a_m\}$, $U = \{u_1, \ldots, u_n\}$, то *матрицей инцидентности* $B_G = (B_{ij})$ мультиграфа G называется матрица размера $m \times n$, определяемая по следующему правилу:

$$B_{ij} \rightleftharpoons \begin{cases} 1, & \text{если дуга } u_j \text{ исходит из вершины } a_i; \\ -1, & \text{если дуга } u_j \text{ заходит в вершину } a_i \\ & \text{и } u_j \text{ не является петлей;} \\ 0 \text{ —} & \text{в противном случае.} \end{cases}$$

П р и м е р 3.1.5. Мультиграф G, изображенный на рис. 3.7, имеет матрицу инцидентности

$$B_G = \begin{pmatrix} -1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 1 & -1 \end{pmatrix}.$$

Мультиграфы $G = \langle M, U, P\rangle$ и $G' = = \langle M', U', P'\rangle$ называются *изоморфными*, если существуют биекции $\varphi : M \leftrightarrow M'$ и $\psi : U \leftrightarrow U'$ такие, что $(a, u, b) \in P$ тогда и только тогда, когда $(\varphi(a), \psi(u), \varphi(b)) \in \in P'$.

Аналогично теореме 3.1.1. справедлива

Теорема 3.1.2. *Мультиграфы G и G' изоморфны тогда и только тогда, когда их матрицы инцидентности получаются друг из друга некоторыми перестановками строк и столбцов.*

Во многих задачах требуется дополнительная информация о вершинах и ребрах, например, о расстоянии между населенными пунктами в случае, когда граф представляет собой сеть дорог, или о времени прохождения сигнала от одного узла связи к другому и т. д. В таких задачах используются взвешенные графы.

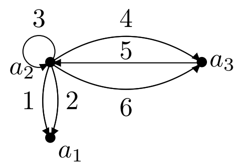


Рис. 3.7

Пусть S_M, S_R — множества меток. *Пометкой* или *распределением меток* графа $G = \langle M; R\rangle$ называется пара функций $f : M \to S_M$ (*распределение меток вершин*), $g : R \to S_R$ (*распределение меток дуг*). Четверка $\langle M, R, f, g\rangle$ называется *взвешенным* или *помеченным* графом. Для вершины $a \in M$ элемент $f(a)$ называется *весом вершины* a, а для дуги $u \in R$ элемент $g(u)$ — *весом дуги* u. Часто бывают помеченными только вершины (в этом случае $g = \mathrm{const}$) или дуги (в этом случае $f = \mathrm{const}$).

П р и м е р 3.1.6. Пусть $M = \{a_1, a_2, a_3, a_4\}$, $R = [a_1, a_2] \cup [a_2, a_3] \cup [a_1, a_4] \cup [a_2, a_4]$, $f : M \to C$, где C — множество городов, $g : R \to \omega$, $f(a_1) =$Омск, $f(a_2) =$Новосибирск, $f(a_3) =$Кемерово, $f(a_4) =$ Павлодар, $g([a_1, a_2]) = 681$, $g([a_2, a_3]) = 274$, $g([a_1, a_4]) = 413$, $g([a_2, a_4]) = 589$. Помеченный граф $\langle M, R, f, g\rangle$ изображен на рис. 3.8 и представляет собой схему автомобильных дорог с указанием их протяженности. □

Информацию о весах дуг во взвешенном графе можно представлять в виде *матрицы весов* $W = (w_{ij})$, где w_{ij} — вес дуги (a_i, a_j), если дуга (a_i, a_j) существует, а для несуществующих дуг веса обычно помечают нулем или знаком ∞ в зависимости от приложений. В примере 3.1.6

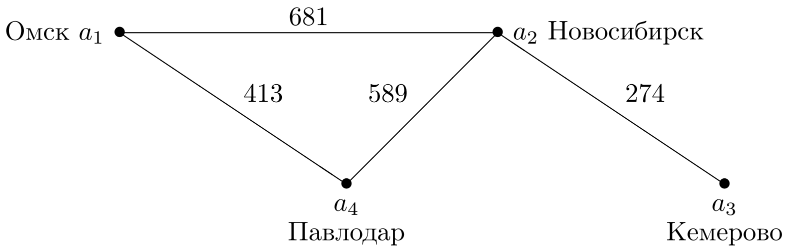


Рис. 3.8

матрица весов имеет вид

$$W = \begin{pmatrix} 0 & 681 & \infty & 413 \\ 681 & 0 & 274 & 589 \\ \infty & 274 & 0 & \infty \\ 413 & 589 & \infty & 0 \end{pmatrix}.$$

Если граф $G = \langle M; R \rangle$ является *разреженным*, т. е. число дуг $|R|$ достаточно мало по сравнению с числом вершин $|M|$, то более эффективным, чем с помощью матрицы смежности, является представление дуг графа посредством *списка дуг*. Этот список задается двумя наборами $\overline{m} = (m_1, m_2, \ldots, m_{|R|})$ и $\overline{n} = = (n_1, n_2, \ldots, n_{|R|})$, где (a_{m_i}, a_{n_i}) — i-я дуга графа G.

П р и м е р 3.1.7. Орграф, изображенный на рис. 3.6, представляется следующим списком дуг: $\overline{m} = (1, 1, 2, 3, 4, 4)$, $\overline{n} = = (1, 2, 3, 4, 3, 4)$. Для представления рассматриваемого графа матрицей смежности требуется $5^2 = 25$ элементов, а списком дуг — только $6 \cdot 2 = 12$ элементов.

Другим представлением графа, удобным при работе с графами, в которых удаляются или добавляются вершины, является *структура смежности*, получаемая составлением для каждой вершины a списка номеров ее *последователей*, т. е. номеров вершин b, для которых имеется дуга (a, b).

П р и м е р 3.1.8. Орграф, изображенный на рис. 3.6, представляется следующей структурой смежности:

Вершины	Списки последователей
1:	1, 2
2:	3
3:	4
4:	3, 4
5:	

§ 3.2. Подграфы и части графа. Операции над графами

Граф $G' = \langle M'; R' \rangle$ называется *подграфом* графа $G = \langle M; R \rangle$, если $M' \subseteq M$ и $R' = R \cap (M')^2$. Граф G' называется *частью* графа G, если $M' \subseteq M$ и $R' \subseteq R \cap (M')^2$.

П р и м е р 3.2.1. Граф $G' = \langle \{1,2,3\}; [1,2] \cup [2,3] \cup \{(1,3)\} \rangle$ (рис. 3.9*б*) является подграфом графа $G = \langle \{1,2,3,4\}; [1,2] \cup \cup [1,4] \cup [2,3] \cup [3,4] \cup \{(1,3)\} \rangle$ (рис. 3.9*а*), а граф $G'' = \langle \{1,2,3\}; [1,2] \cup \{(3,2)\} \rangle$ (рис. 3.9*в*) — частью графа G. $\square$

Рассмотрим некоторые основные операции, производимые над графами.

Операцией добавления к графу $G = \langle M; R \rangle$ *вершины* a образуется граф $\langle M \cup \{a\}; R \rangle$. *Операция добавления дуги* (a, b) к графу G состоит в образовании графа $\langle M \cup \{a, b\}; R \cup \{(a, b)\} \rangle$. Под *операцией удаления дуги* (a, b) из графа G понимается операция, заключающаяся в удалении пары (a, b) из множества дуг R, в результате получается граф $\langle M; R \setminus \{(a, b)\} \rangle$. *Операция удаления вершины* a из графа G заключается в удалении вершины a вместе с инцидентными ей дугами:

$$\langle M \setminus \{a\}; R \setminus \{(b, c) | b = a \text{ или } c = a\} \rangle.$$

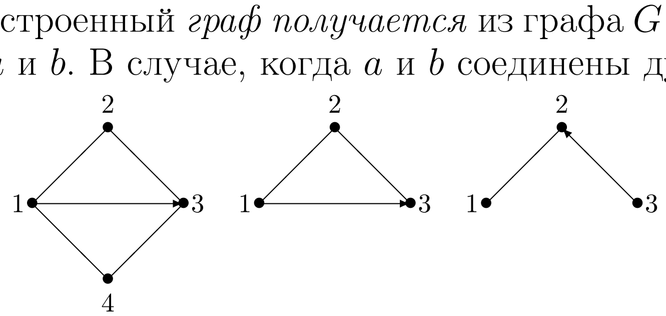
Операция отождествления вершин a и b графа $G = \langle M; R \rangle$ состоит в удалении из графа G вершин a и b и присоединении новой вершины a', дуг (a', c), если $(a, c) \in R$ или $(b, c) \in R$, и дуг (c, a'), если $(c, a) \in R$ или $(c, b) \in R$:

$$\langle (M \setminus \{a, b\}) \cup \{a'\}; (R \setminus \{(c, d) | c = a \text{ или } d = a, \text{ или } c = b,$$

$$\text{или } d = b\}) \cup \{(a', c) | (a, c) \in R, \text{ или } (b, c) \in R\} \cup$$

$$\cup \{(c, a') | (c, a) \in R, \text{ или } (c, b) \in R\} \rangle.$$

Говорят, что построенный *граф получается* из графа G *отождествлением вершин* a и b. В случае, когда a и b соединены дугой, операцию



а *б* *в*

Рис. 3.9

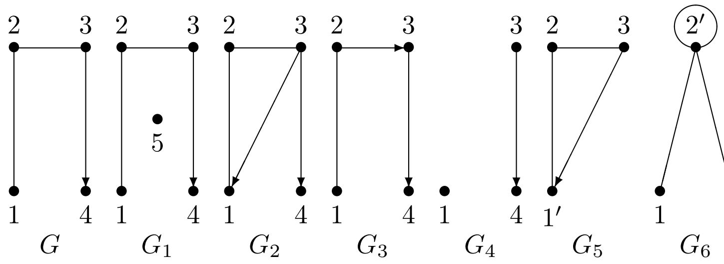


Рис. 3.10

отождествления вершин a и b называют *стягиванием дуги* (a, b).

П р и м е р 3.2.2. Из графа G, показанного на рис. 3.10, добавлением вершины 5 образуется граф G_1, добавлением дуги $(3, 1)$ — граф G_2, удалением дуги $(3, 2)$ — граф G_3, удалением вершины 2 — граф G_4, отождествлением вершин 1 и 4 — граф G_5, стягиванием дуги $(2, 3)$ — граф G_6. □

Дополнением графа без петель $G = \langle M; R\rangle$ называется граф $\overline{G} = \langle M; M^2 \setminus (R \cup \mathrm{id}_M)\rangle$.

П р и м е р 3.2.3. Дополнением графа G, изображенного на рис. 3.10, является граф $\overline{G}$, показанный на рис. 3.11. □

Пусть $G_1 = \langle M_1; R_1\rangle$, $G_2 = \langle M_2; R_2\rangle$ — графы. *Объединением* $G_1 \cup G_2$ графов G_1 и G_2 называется граф $\langle M_1 \cup M_2; R_1 \cup R_2\rangle$. Если $M_1 \cap M_2 \neq \varnothing$, то *пересечением* $G_1 \cap G_2$ графов G_1 и G_2 называется граф $\langle M_1 \cap M_2;\ R_1 \cap R_2\rangle$. *Кольцевой суммой* $G_1 \oplus G_2$ графов G_1 и G_2 называется граф $\langle M_1 \cup M_2; R_1 \oplus R_2\rangle$, где $R_1 \oplus R_2 = (R_1 \setminus R_2) \cup (R_2 \setminus R_21)$.

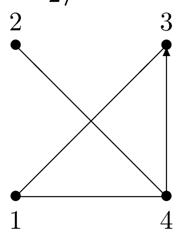


Рис. 3.11

П р и м е р 3.2.4. Для графов $G_1 = \langle\{a_1, a_2, a_3\}; [a_1, a_2] \cup \{(a_2, a_3)\}\rangle$ и $G_2 = \langle\{a_1, a_2, a_4\}; \{(a_1, a_2), (a_4, a_1)\}\rangle$ (рис. 3.12) найдем $G_1 \cup G_2$, $G_1 \cap G_2$, $G_1 \oplus G_2$. По определению имеем $G_1 \cup G_2 = \langle\{a_1, a_2, a_3, a_4\}; [a_1, a_2] \cup \{(a_2, a_3), (a_4, a_1)\}\rangle$, $G_1 \cap G_2 = \langle\{a_1, a_2\}; \{(a_1, a_2)\}\rangle$, $G_1 \oplus G_2 = \langle\{a_1, a_2, a_3, a_4\}; \{(a_2, a_1), (a_2, a_3), (a_4, a_1)\}\rangle$.

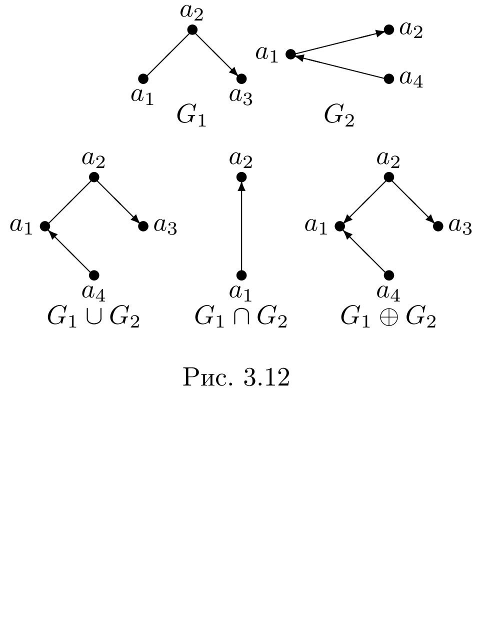


Рис. 3.12

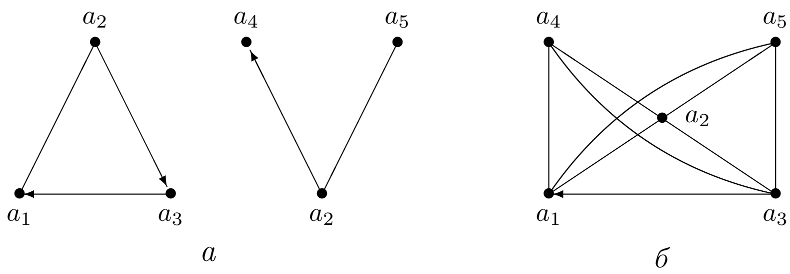


Рис. 3.13

Соединением $G_1 + G_2$ графов G_1 и G_2 называется граф $\langle M_1 \cup M_2; R_1 \cup R_2 \cup \cup\{[a,b] | a \in M_1, b \in M_2, a \neq b\}\rangle$.

Пример 3.2.5. Для графов G_1 и G_2, показанных на рис. 3.13*а*, соединением $G_1 + G_2$ является граф, представленный на рис. 3.13*б*. □

Произведением $G_1 \times G_2$ графов G_1 и G_2 называется граф $\langle M_1 \times M_2; R\rangle$, в котором $((a_1, b_1), (a_2, b_2)) \in R$ тогда и только тогда, когда $a_1 = a_2$ и $(b_1, b_2) \in R_2$, или $b_1 = b_2$ и $(a_1, a_2) \in R_1$.

Пример 3.2.6. На рис. 3.14 изображено произведение $G_1 \times G_2$ графов $G_1 = \langle\{1,2\}; \{(1,1),(2,1)\}\rangle$ и $G_2 = \langle\{a,b,c\}; [a,b] \cup \{(b,c)\}\rangle$.

Неорграф без петель называется *полным*, если его любые две различные вершины смежны. Полный граф, имеющий n вершин, обозначается через K_n.

С помощью операции произведения определим по индукции важный класс графов, называемых *n-мерными кубами* (*n-кубами*). Рассмотрим граф K_2, вершины которого обозначим 0 и 1. n-Мерный куб, или n-куб Q_n, определяется по следующим правилам: Q_0 — граф без петель, состоящий из одной вершины, $Q_1 \rightleftharpoons K_2$, $Q_n \rightleftharpoons K_2 \times Q_{n-1}$, $n > 1$. Вершинами n-мерного куба Q_n являются всевозможные n-ки, состоящие из нулей и единиц (всего таких наборов 2^n), а ребра задаются по следующему правилу: вершины смежны тогда и только тогда, когда соответствующие кортежи различаются ровно одной координатой. На рис. 3.15 показаны двумерный Q_2 и трехмерный Q_3 кубы.

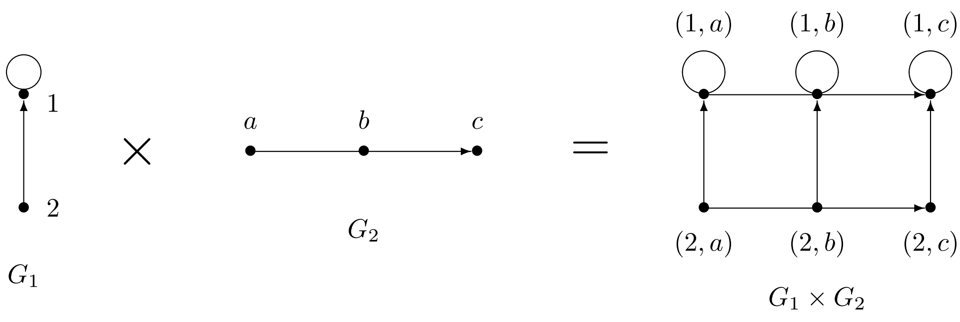


Рис. 3.14

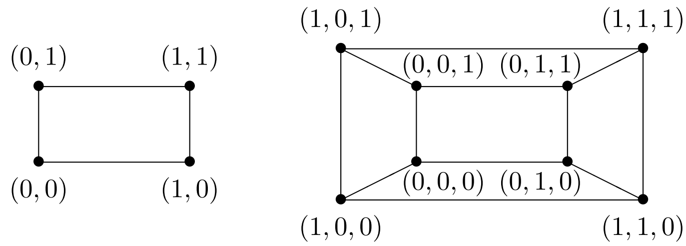


Рис. 3.15

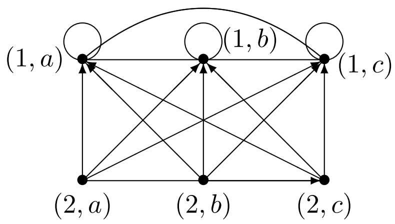


Рис. 3.16

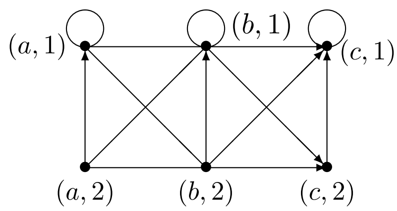


Рис. 3.17

Композицией $G_1[G_2]$ графов G_1 и G_2 называется граф $\langle M_1 \times M_2; R\rangle$, в котором $((a_1, b_1), (a_2, b_2)) \in R$ тогда и только тогда, когда выполняется одно из следующих условий:

1) $(a_1, a_2) \in R_1$;

2) $a_1 = a_2$ и $(b_1, b_2) \in R_2$.

П р и м е р 3.2.7. Композицией $G_1[G_2]$ графов G_1 и G_2, рассмотренных в примере 3.2.6, является граф, изображенный на рис. 3.16, а композицией $G_2[G_1]$ — граф, представленный на рис. 3.17. □

Неформально композиция $G_1[G_2]$ означает, что каждая вершина a графа G_1 заменяется на изоморфную копию G_a графа G_2, а затем, если $(a_1, a_2) \in R_1$, то между любыми вершинами b_1 из G_{a_1} и b_2 из G_{a_2} проводится дуга (b_1, b_2).

§ 3.3. Маршруты. Достижимость. Связность

Пусть $G = \langle M; R\rangle$ — граф. Последовательность

$$a_1, u_1, a_2, u_2, \ldots, u_n, a_{n+1}, \tag{3.1}$$

где $a_1, a_2, \ldots, a_{n+1} \in M$, $u_1, u_2, \ldots, u_n \in R$, называется *маршрутом*, соединяющим вершины a_1 и a_{n+1} ((a_1, a_{n+1})-*маршрутом*), если $u_i = (a_i, a_{i+1})$, $i = 1, 2, \ldots, n$ (рис. 3.18).

Очевидно, что маршрут (3.1) можно задать последовательностью $a_1, \ldots, a_{n+1}$ его вершин, а также последовательностью $u_1, \ldots, u_n$ дуг. Число n дуг в маршруте (3.1) называется его *длиной*.

Пусть G — неорграф. Маршрут (3.1) называется *цепью*, если все ребра $[a_1, a_2], \ldots, [a_n, a_{n+1}]$ различны, и *простой цепью*, если все его

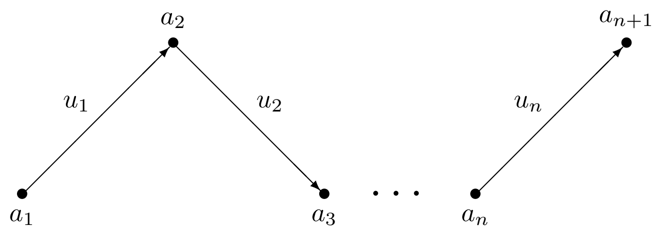


Рис. 3.18

вершины, кроме, возможно, первой и последней, различны. Маршрут (3.1) называется *циклическим*, если $a_1 = a_{n+1}$. Циклическая цепь называется *циклом*, а циклическая простая цепь — *простым циклом*. Неорграф без циклов называется *ациклическим*. Минимальная из длин циклов неорграфа называется его *обхватом*.

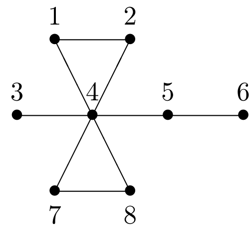


Рис. 3.19

П р и м е р 3.3.1. Рассмотрим граф, изображенный на рис. 3.19. В нем наборы $(1, 2)$, $(1, 2, 4, 7)$, $(3, 4, 5, 6)$ являются простыми цепями; $(1, 2, 4, 7, 8, 4)$ — цепь, не являющаяся простой; $(1, 2, 4, 7, 8, 4, 2)$ — маршрут, не являющийся цепью; $(1, 2, 4, 7, 8, 4, 1)$ — цикл, не являющийся простым; $(1, 2, 4, 1)$ — простой цикл. Обхват этого графа равен 3. □

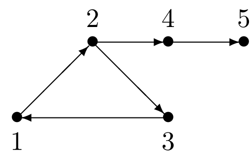


Рис. 3.20

Пусть G — граф, возможно, ориентированный. Маршрут (3.1) называется *путем*, если все его дуги различны. Путь (3.1) называется *контуром*, если $a_1 = a_{n+1}$. Граф, не имеющий контуров, называется *бесконтурным*. Вершина b называется *достижимой* из вершины a, если существует (a, b)-путь.

П р и м е р 3.3.2. Граф, изображенный на рис. 3.20, имеет контур $(1, 2, 3)$. Вершина 5 достижима из любой другой вершины, а из вершины 5 не достижима ни одна из вершин. □

Неорграф называется *связным*, если любые две его несовпадающие вершины соединены маршрутом. Граф G называется *связным*, если соответствующий ему неорграф $F(G)$ тоже является связным. Граф G называется *сильно связным*, если для каждой пары различных вершин a и b существуют (a, b)-маршрут и (b, a)-маршрут. Аналогично определяются понятия связности и сильной связности для мультиграфов.

П р и м е р 3.3.3. Граф, показанный на рис. 3.19, является связным, орграф, представленный на рис. 3.20, — связным, но не сильно связным, а граф, изображенный на рис. 3.21, не является связным. □

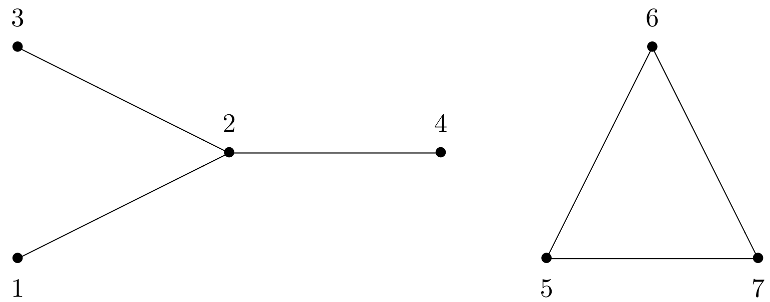


Рис. 3.21

Заметим, что любой связный неорграф является сильно связным.

Всякий максимальный по включению (сильно) связный подграф данного графа называется его (*сильной*) *связной компонентой* или (*сильной*) *компонентой связности*.

Граф, показанный на рис. 3.21, имеет две компоненты связности с множеством вершин $\{1, 2, 3, 4\}$ и $\{5, 6, 7\}$. Граф, представленный на рис. 3.20, имеет три сильные компоненты, задаваемые множествами вершин $\{1, 2, 3\}$, $\{4\}$ и $\{5\}$.

Теорема 3.3.1. *Любой граф представляется в виде объединения непересекающихся связных (сильных) компонент. Разложение графа на связные (сильные) компоненты определяется однозначно.*

Таким образом, множества вершин связных компонент, а также сильных компонент образуют разбиение множества вершин графа, а число $c(G)$ связных компонент графа G определяется однозначно.

Следующая теорема позволяет по матрице смежности A_G исследовать маршруты данного графа G.

Теорема 3.3.2. *Если A_G — матрица смежности графа G, то (i, j)-й элемент матрицы $A_G^k = \underbrace{A_G \cdot \ldots \cdot A_G}_{k\ \text{раз}}$ есть число (a_i, a_j)-маршрутов длины k.*

Следствие 3.3.3. 1. *В графе G мощности n тогда и только тогда существует (a_i, a_j)-маршрут $(a_i \neq a_j)$, когда (i, j)-й элемент матрицы $A_G + A_G^2 + \ldots + A_G^{n-1}$ не равен нулю.*

2. *В графе G мощности n тогда и только тогда существует цикл, содержащий вершину a_i, когда (i, i)-й элемент матрицы $A_G + A_G^2 + \ldots + A_G^n$ не равен нулю.*

П р и м е р 3.3.4. Определим с помощью матрицы смежности существование $(1,3)$-маршрута в графе G, изображенном на рис. 3.22. В матрице

$$A_G = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$(1,3)$-элемент равен 0, т. е. $(1,3)$-маршрутов длины 1 нет. В матрице

$$A_G^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

$(1,3)$-элемент также равен 0. В матрице

$$A_G^3 = A_G^2 \cdot A_G = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 2 \\ 3 & 1 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 0 & 1 \\ 2 & 3 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$(1,3)$-элемент равен 1, т. е. существует один $(1,3)$-маршрут длины 3.

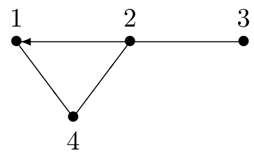


Рис. 3.22

Из рисунка видно, что этот маршрут определяется набором вершин $(1,4,2,3)$. Эту последовательность можно найти на основе перемножения матрицы смежности: элемент $(1,3)$ матрицы A_G^3 получается при перемножении элемента $(1,2)$ матрицы A_G^2 и элемента $(2,3)$ матрицы A_G; в свою очередь элемент $(1,2)$ матрицы A_G^2 образуется при перемножении элемента $(1,4)$ матрицы A_G на элемент $(4,2)$ матрицы A_G; следовательно, двигаясь от 1 к 3 за три шага, получаем маршрут $(1,4,2,3)$.

В матрице A_G^3 элемент $(4,2)$ равен 3, т. е. существует 3 $(4,2)$-маршрута длины 3: $(4,1,4,2)$, $(4,2,4,2)$, $(4,2,3,2)$. $\square$

Образуем из матрицы $(b_{ij}) = E + A_G + A_G^2 + \dots + A_G^{n-1}$ матрицу $C = (c_{ij})$ порядка n по следующему правилу:

$$c_{ij} \rightleftharpoons \begin{cases} 1, & \text{если } b_{ij} \neq 0, \\ 0, & \text{если } b_{ij} = 0. \end{cases}$$

Матрица C называется *матрицей связности*, если G — неорграф, и *матрицей достижимости*, если G — орграф. В графе G тогда и только тогда существует (a_i, a_j)-маршрут $(i \neq j)$, когда $c_{ij} = 1$. Таким образом, в матрице C содержится информация о существовании связей между различными элементами графа посредством маршрутов. Если G — связный неорграф, то все элементы матрицы связности C равны единице. В общем случае матрица связности неорграфа является матрицей отношения эквивалентности, соответствующего разбиению множества вершин графа на компоненты связности.

Определим следующим образом *матрицу контрдостижимости* $Q = (q_{ij})$:

$$q_{ij} \rightleftharpoons \begin{cases} 1, & \text{если вершина } a_i \text{ достижима из вершины } a_j \text{ или } i = j; \\ 0 & \text{в противном случае.} \end{cases}$$

Нетрудно заметить, что если C — матрица достижимости, то $Q = C^{\mathrm{T}}$.

Матрицы достижимости и контрдостижимости $C = (c_{ij})$ и $Q = (q_{ij})$ можно использовать для нахождения сильных компонент графа. Рассмотрим матрицу $S = C * Q$, где операция $*$ означает поэлементное произведение матриц C и Q: $s_{ij} = c_{ij} \cdot q_{ij}$ (см. § 1.5). Элемент s_{ij} матрицы S равен 1 тогда и только тогда, когда $i = j$ или вершины a_i и a_j *взаимно достижимы*, т. е. a_i достижима из a_j и a_j достижима из a_i. Таким образом, матрица S является матрицей следующего отношения эквивалентности E:

$$a_i \, E \, a_j \Leftrightarrow a_i \text{ и } a_j \text{ находятся в одной сильной компоненте.}$$

Следовательно, сильная компонента, содержащая вершину a_i, состоит из элементов a_j, для которых $s_{ij} = 1$.

П р и м е р 3.3.5. Матрицы достижимости C и контрдостижимости Q графа, изображенного на рис. 3.20, имеют вид

$$C = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \ Q = C^{\mathrm{T}} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix},$$

$$S = C * Q = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

По 2-й строке матрицы S находим, что сильная компонента, содержащая вершину 2, состоит из вершин $\{1, 2, 3\}$.

§ 3.4. Расстояния в графах

Пусть $G = \langle M; R\rangle$ — связный неорграф, a, b — две его несовпадающие вершины. Длина кратчайшего (a, b)-маршрута называется *расстоянием* между вершинами a и b и обозначается через $\rho(a, b)$. Положим $\rho(a, a) \rightleftharpoons 0$. Очевидно, что введенное таким образом расстояние удовлетворяет следующим аксиомам *метрики*:

— $\rho(a, b) \geqslant 0$;

— $\rho(a, b) = 0 \Leftrightarrow a = b$;

— $\rho(b, a) = \rho(a, b)$ (симметричность);

— $\rho(a, b) \leqslant \rho(a, c) + \rho(c, b)$ (неравенство треугольника).

Если $M = \{a_1, a_2, \ldots, a_n\}$, то матрица $P = (p_{ij})$, в которой $p_{ij} = \rho(a_i, a_j)$, называется *матрицей расстояний*. Заметим, что $P^{\mathrm{T}} = P$, т.е. матрица P симметрична.

Для фиксированной вершины a величина

$$e(a) \rightleftharpoons \max\{\rho(a, b) \mid b \in M\}$$

называется *эксцентриситетом вершины* a. Таким образом, эксцентриситет вершины равен расстоянию от данной вершины до наиболее удаленной от нее. Если P — матрица расстояний, то эксцентриситет $e(a_i)$ равен наибольшему из чисел, стоящих в i-й строке.

Максимальный среди всех эксцентриситетов вершин называется *диаметром графа* G и обозначается через $d(G)$:

$$d(G) \rightleftharpoons \max\{e(a) \mid a \in M\}.$$

Вершина a называется *периферийной*, если $e(a) = d(G)$.

П р и м е р 3.4.1. Найдем диаметр графа G, изображенного на рис. 3.23. Матрица расстояний P имеет вид

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 3 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & 2 & 1 & 1 \\ 3 & 2 & 0 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix},$$

отсюда $e(1) = 3$, $e(2) = 2$, $e(3) = 3$, $e(4) = 2$, $e(5) = 2$ и, следовательно, $d(G) = 3$. Вершины 1 и 3 являются периферийными. $\square$

Минимальный из эксцентриситетов графа G называется его *радиусом* и обозначается через $r(G)$:

$$r(G) \rightleftharpoons \min\{e(a) \mid a \in M\}.$$

Вершина a называется *центральной*, если $e(a) = r(G)$. Множество всех центральных вершин графа называется его *центром*.

П р и м е р 3.4.2. 1. Радиус графа, показанного на рис. 3.23, равен 2, а его центром является множество $\{2, 4, 5\}$.

2. В полном графе K_n все различные вершины смежны, и поэтому $d(K_n) = r(K_n) = 1$.

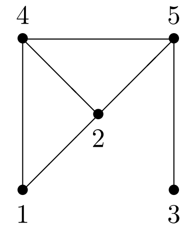


Рис. 3.23

Задача нахождения центральных вершин возникает в практической деятельности людей. Пусть, например, граф представляет собой сеть дорог, т. е. вершины соответствуют населенным пунктам, а ребра — дорогам между ними. Требуется оптимально разместить больницы, пункты обслуживания и т. п. В подобных ситуациях оптимизация заключается в минимизации расстояния от места обслуживания до наиболее удаленного населенного пункта. Следовательно, местами размещения должны быть центральные вершины графа. Реальные задачи отличаются от этой идеальной тем, что приходится учитывать и другие обстоятельства — расстояния между населенными пунктами, стоимость, время проезда и т. д. Для учета этих параметров используются взвешенные графы.

Пусть $G = \langle M; R\rangle$ — взвешенный граф, в котором вес каждой дуги (a, b) есть некоторое вещественное число $\mu(a, b)$. *Весом маршрута* $a_1, a_2, \ldots, a_n, a_{n+1}$ называется число $\mu = \sum\limits_{i=1}^{n} \mu(a_i, a_{i+1})$. *Взвешенным расстоянием* (*w-расстоянием*) $\rho_w(a, b)$ между вершинами a и b называется минимальный из весов (a, b)-маршрутов. (a, b)-Маршрут, вес которого равен расстоянию $\rho_w(a, b)$, называется *кратчайшим* (a, b)-маршрутом во взвешенном графе G. *Взвешенным эксцентриситетом* $e_w(a)$ вершины a называется число $\max\{\rho_w(a, b) \mid b \in M\}$. *Взвешенной центральной вершиной* графа G называется вершина a, для которой $e_w(a) = \min\{e_w(b) \mid b \in M\}$. Взвешенный эксцентриситет центральной вершины называется *взвешенным радиусом* графа G и обозначается через $r_w(G)$.

П р и м е р 3.4.3. Во взвешенном графе G, показанном на рис. 3.8, центральной вершиной является вершина “Новосибирск”, а $r_w(G) = 681$. $\square$

§ 3.5. Нахождение кратчайших маршрутов

Пусть $G = \langle M; R\rangle$ — взвешенный граф, имеющий n вершин и матрицу весов $W = (w_{ij})$, $w_{ij} \in \mathbb{R}$. Опишем некоторые методы нахождения взвешенного расстояния от фиксированной вершины $a_i \in M$ (называемой *источником*) до всех вершин графа G.

Мы будем предполагать, что в G отсутствуют контуры с отрицательным весом, поскольку, двигаясь по такому контуру достаточное количество раз, можно получить маршрут, имеющий вес, меньший любого заведомо взятого числа, и тем самым задача нахождения расстояния становится бессмысленной.

Определим *алгоритм Форда—Беллмана*. Зададим строку $D^{(1)} = (d_1^{(1)}, d_2^{(1)}, \ldots, d_n^{(1)})$, полагая $d_i^{(1)} = 0$, $d_j^{(1)} = w_{ij}$, $i \neq j$. В этой строке $d_j^{(1)}$ $(j \neq i)$ есть вес w_{ij} дуги (a_i, a_j), если дуга (a_i, a_j) существует, и $d_j^{(1)} \rightleftharpoons \infty$, если $(a_i, a_j) \notin R$. Теперь определим строку $D^{(2)} = (d_1^{(2)}, d_2^{(2)}, \ldots, d_n^{(2)})$, полагая $d_j^{(2)} \rightleftharpoons \min\{d_j^{(1)}, d_k^{(1)} + w_{kj}\}_{k=1,\ldots,n}$. Нетрудно заметить, что $d_j^{(2)}$ — минимальный из весов (a_i, a_j)-маршрутов, состоящих не более чем из двух дуг (рис. 3.24). Продолжая процесс, на шаге s определим строку $D^{(s)} = (d_1^{(s)}, d_2^{(s)}, \ldots, d_n^{(s)})$, полагая $d_j^{(s)} \rightleftharpoons \min\{d_j^{(s-1)}, d_k^{(s-1)} + +w_{kj}\}_{k=1,\ldots,n}$. Искомая строка w-расстояний получается при $s = n - 1$: $d_j^{(n-1)} = \rho_w(a_i, a_j)$. Действительно, на этом шаге из весов всех (a_i, a_j)-маршрутов, содержащих не более $n - 1$ дуг, выбирается наименьший, а каждый маршрут более чем с $n - 1$ дугами содержит контур, добавление которого к маршруту не уменьшает w-расстояния, так как мы предположили отсутствие контуров отрицательного веса. Работу алгоритма можно завершить на шаге k, если $D^{(k)} = D^{(k+1)}$.

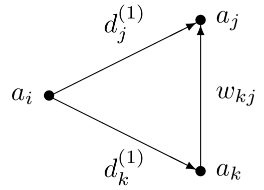


Рис. 3.24

П р и м е р 3.5.1. Продемонстрируем работу алгоритма Форда—Беллмана на примере взвешенного графа с матрицей весов

$$W = \begin{pmatrix} 0 & 1 & \infty & \infty & 3 \\ \infty & 0 & 3 & 3 & 8 \\ \infty & \infty & 0 & 1 & -5 \\ \infty & \infty & 2 & 0 & \infty \\ \infty & \infty & \infty & 4 & 0 \end{pmatrix},$$

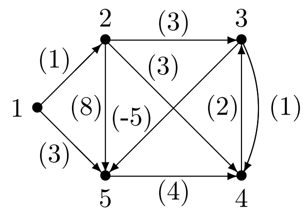


Рис. 3.25

показанного на рис. 3.25. В качестве источника выберем вершину 1. Тогда $D^{(1)} = (0, 1, \infty, \infty, 3)$, $D^{(2)} = (0, 1, 4, 4, 3)$, $D^{(3)} = (0, 1, 4, 4, -1)$, $D^{(4)} = (0, 1, 4, 3, -1)$. Таким образом, $\rho_w(1, 1) = 0$, $\rho_w(1, 2) = 1$, $\rho_w(1, 3) = 4$, $\rho_w(1, 4) = 3$, $\rho_w(1, 5) = -1$. $\square$

Отметим, что, зная расстояние от источника a_i до всех остальных вершин графа, можно найти и сами кратчайшие (a_i, a_j)-маршруты. Действительно, пусть a_i, b_1, $b_2, \ldots$, b_r, a_j — кратчайший (a_i, a_j)-маршрут. Тогда по строке $D^{(n-1)}$ вершина $b_r = a_{k_1}$ находится из соотношения $\rho_w(a_i, a_j) = \rho_w(a_i, a_{k_1}) + w_{k_1 j}$, вершина $b_{r-1} = a_{k_2}$ — из соотношения $\rho_w(a_i, a_{k_1}) = \rho_w(a_i, a_{k_2}) + +w_{k_2 k_1}$ и т. д.

П р и м е р 3.5.2. В примере 3.5.1 кратчайший $(1, 4)$-маршрут определяется следующим образом: $\rho_w(1, 4) = 3 = -1 + 4 = \rho_w(1, 5) + w_{54}$, тогда $b_r = 5$; $\rho_w(1,\ 5) = -1 = 4 - 5 = \rho_w(1, 3) + +w_{35}$, откуда $b_{r-1} = 3$; $\rho_w(1, 3) = 4 = 1 + 3 = w_{12} + w_{23}$, следовательно, $b_{r-2} = b_2 = 3$, $b_{r-3} = b_1 = 2$. Таким образом, кратчайший $(1, 4)$-маршрут задается последовательностью вершин $(1, 2, 3,\ 5, 4)$. $\square$

§ 3.6. Степени вершин

Степенью или *валентностью* вершины a неорграфа G называется число ребер, инцидентных вершине a, т. е. число ребер, концом которых является вершина a (при этом петли считаются дважды). Если G — орграф, то степени его вершин определяются как степени вершин в соответствующем неорграфе $F(G)$. Аналогично вводится понятие степени вершины в мультиграфах. Степень вершины a будем обозначать через $\deg_G a$ или просто $\deg a$. Вершина степени 0 называется *изолированной*, вершина степени 1 — *концевой* или *висячей*.

П р и м е р 3.6.1. Вершины графа G, изображенного на рис. 3.26, имеют следующие валентности: $\deg 1 = \deg 2 = \deg 3 = 1$ (т. е. 1, 2, 3 — висячие вершины), $\deg 4 = 5$, $\deg 5 = 0$ (т. е. 5 — изолированная вершина).

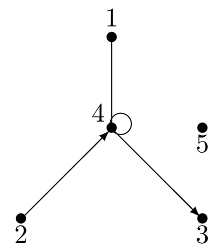


Рис. 3.26

Рассмотрим сумму степеней всех вершин графа. Поскольку каждое ребро входит в эту сумму дважды, справедливо

Утверждение 3.6.1 (лемма о рукопожатиях). *Сумма степеней всех вершин графа является четным числом и равна удвоенному числу ребер.*

Пусть G — бесконтурный орграф. *Полустепенью исхода* $\deg^+ a$ вершины a называется число дуг, исходящих из a. *Полустепенью захода* $\deg^- a$ вершины a называется число дуг, которые заходят в вершину a. Справедливо соотношение $\deg a = = \deg^+ a + \deg^- a$.

В примере 3.6.1 имеем $\deg^+ 4 = 2$, $\deg^- 4 = 2$.

§ 3.7. Обходы графов

Опишем одну из задач, положивших начало теории графов, — *задачу о кенигсбергских мостах*. На рис. 3.27 схематично изображена карта г. Кенигсберга в XVIII в. Город был расположен на берегах и двух островах реки Преголи. Острова между собой и с берегами были связаны семью мостами. Возник вопрос: можно ли, выйдя из дома, вернуться обратно, пройдя по каждому мосту ровно один раз?

Неориентированный мультиграф G, представляющий задачу, показан на рис. 3.28. Вершины x_1, x_4 соответствуют берегам реки, x_2, x_3 — островам, ребра мультиграфа — мостам. Следовательно, на языке теории графов задача формулируется следующим образом: существует ли в мультиграфе цикл, содержащий все ребра данного мультиграфа?

Выдающимся математиком и механиком Л. Эйлером сформулирован и доказан критерий того, что связный неориентированный мультиграф имеет цикл, содержащий все ребра данного мультиграфа. *Цикл*, содержащий все ребра мультиграфа, называется *эйлеровым*, и *мультиграф*, в котором имеется эйлеров цикл, также называется *эйлеровым*.

Теорема 3.7.1. *Связный неориентированный мультиграф является эйлеровым тогда и только тогда, когда степень каждой из его вершин — четное число.*

Мультиграф, изображенный на рис. 3.28, не содержит эйлеров цикл, поскольку в нем есть вершины, имеющие нечетную степень. Более того, все его вершины имеют нечетную степень.

Опишем алгоритм построения эйлерова цикла в эйлеровом мультиграфе. Этот алгоритм задается следующими правилами.

1. Выбрать произвольно некоторую вершину a.

2. Выбрать произвольно некоторое ребро u, инцидентное a, и присвоить ему номер 1 (назовем это ребро *пройденным*).

3. Каждое пройденное ребро вычеркнуть и присвоить ему номер, на единицу больший номера предыдущего вычеркнутого ребра.

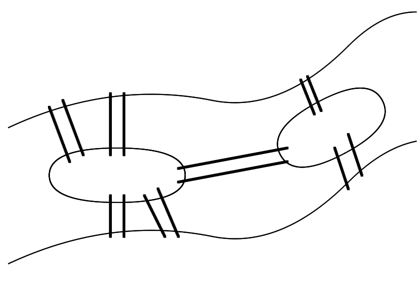


Рис. 3.27

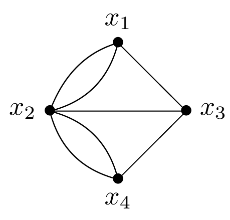


Рис. 3.28

4. Находясь в вершине x, не выбирать ребро, соединяющее x с a, если имеется возможность иного выбора.

5. Находясь в вершине x, не выбирать ребро, которое является *перешейком* (т.е. ребром, при удалении которого граф, образованный невычеркнутыми ребрами, распадается на две компоненты связности, каждая из которых имеет хотя бы по одному ребру).

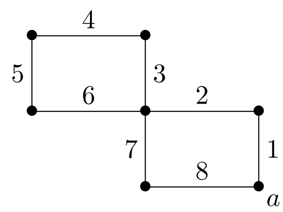


Рис. 3.29

6. После того как в графе будут занумерованы все ребра, образуется эйлеров цикл, причем порядок нумерации соответствует последовательности обхода ребер.

П р и м е р 3.7.1. Найдем эйлеров цикл в эйлеровом графе, изображенном на рис. 3.29. После выбора вершины a и прохождения ребер 1 и 2 имеются три возможности выбора: ребра 3, 6 или 7. Так как ребро 7 является перешейком, выбираем следующее ребро из оставшихся, например 3. Далее обходим оставшиеся ребра и получаем эйлеров цикл 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8. □

Будем говорить, что набор реберно непересекающихся цепей *покрывает* граф G, если каждое ребро графа G входит в одну из этих цепей. Пусть связный граф G содержит k вершин нечетной степени. По лемме о рукопожатиях число k четно. Рассмотрим граф G', полученный добавлением к G новой вершины a и ребер, соединяющих a со всеми вершинами графа G нечетной степени. Поскольку степени всех вершин графа G' четны, G' содержит эйлеров цикл. Если удалить из этого цикла все ребра, инцидентные вершине a, то получится не более $k/2$ цепей, содержащих все ребра графа G, т. е. покрывающих G. С другой стороны, граф, являющийся объединением r реберно непересекающихся цепей, имеет не более $2r$ вершин нечетной степени. Поэтому граф G нельзя покрыть цепями, число которых меньше $k/2$. Тем самым доказана

Теорема 3.7.2. *Если связный граф содержит k вершин нечетной степени, то минимальное число покрывающих его реберно непересекающихся цепей равно $k/2$.*

В частности, при $k = 2$ граф имеет цепь, которая соединяет вершины нечетной степени и содержит все ребра графа. Цепь, содержащая все ребра графа, называется *эйлеровой*.

Мы рассмотрели обходы ребер графа. Следующей нашей целью является изучение обходов вершин графа.

Граф называется *гамильтоновым*, если в нем имеется простой цикл, содержащий каждую вершину этого графа. Сам такой цикл также называется *гамильтоновым*. *Гамильтоновой* называется и простая цепь, содержащая все вершины графа. Очевидно, что любой граф, ребра которого образуют простой цикл, является гамильтоновым, а граф, показанный на рис. 3.29, — негамильтоновым.

Несмотря на схожесть задач о нахождении эйлеровых и гамильтоновых циклов, решение последней значительно сложнее. Известны следующие достаточные условия существования гамильтоновых циклов в связном неорграфе G без петель, имеющем $n \geqslant 3$ вершин:

Теорема 3.7.3. *Если для любых двух различных несмежных вершин a и b графа G выполняется условие $\deg a + \deg b \geqslant n$, то существует гамильтонов цикл.*

Следствие 3.7.4. *Если для любой вершины a графа G выполнено условие $\deg a \geqslant n/2$, то существует гамильтонов цикл.*

С задачей нахождения гамильтонова цикла связана следующая *задача коммивояжера*. Район, который должен посетить бродячий торговец, содержит некоторое количество городов, расстояния между которыми известны. Требуется найти маршрут, проходящий через все пункты по одному разу и возвращающийся в исходный город. Если таких маршрутов много, требуется найти кратчайший из них.

Математическая постановка задачи выглядит так: найти гамильтонов цикл минимального веса. Отметим некоторые практические задачи, сводящиеся к задаче коммивояжера.

1. Пусть граф задает сеть коммуникаций между фиксированными центрами. Необходимо построить маршрут, обеспечивающий посещение всех центров ровно по одному разу.

2. Имеется станок с числовым программным управлением, который высверливает отверстия в печатных платах по заданной программе. Составляя граф, в котором вершины соответствуют требуемым отверстиям, получаем задачу нахождения обхода вершин, такого, что суммарное время, затраченное на него, было бы минимальным.

§ 3.8. Остовы графов

Деревом называется связный неорграф, не содержащий циклов. Любой неорграф без циклов называется *ациклическим графом* или *лесом*. Таким образом, компонентами связности любого леса являются деревья.

На рис. 3.30 изображен лес, состоящий из двух деревьев.

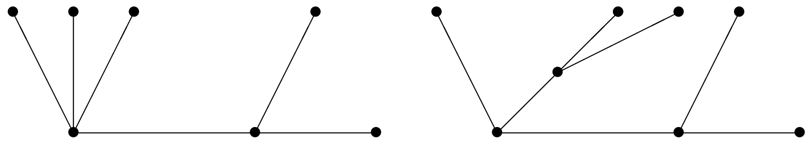


Рис. 3.30

Теорема 3.8.1. *Для неорграфа G без петель, содержащего n вершин, следующие условия эквивалентны:*

1) G — дерево;

2) G — связный граф, содержащий $n-1$ ребро;

3) G — ациклический граф, содержащий $n-1$ ребро;

4) любые две несовпадающие вершины графа G соединяет единственная простая цепь;

5) G — ациклический граф, такой, что если какую-либо пару его несмежных вершин соединить ребром, то полученный граф будет содержать ровно один цикл.

Пусть $G = \langle M; R\rangle$ — неорграф. Часть $G' = \langle M'; R'\rangle$ графа G называется *остовом* или *каркасом* графа G, если $M = M'$ и G' — лес, который на любой связной компоненте графа G образует дерево. Таким образом, если G — связный граф, то остов G' является деревом, которое будем называть *остовным деревом* графа G.

Понятие остова для орграфа G определяется как часть G' графа G, для которой $F(G')$ является остовом графа $F(G)$. Аналогично вводится понятие остовного дерева для связного орграфа G.

Очевидно, что в каждом графе существует остов: разрушая в каждой связной компоненте циклы, т. е. удаляя лишние ребра, получаем остов.

П р и м е р 3.8.1. В качестве остова графа G, изображенного на рис. 3.31, можно взять лес с ребрами 2, 3, 4, 6, 7 (вообще говоря, остов определяется неоднозначно). □

Из теоремы 3.8.1. вытекает

Следствие 3.8.2. *Число ребер произвольного неорграфа G, которые необходимо удалить для получения остова, не зависит от последовательности их удаления и равно $m - n + c$, где m — число ребер, n — число вершин, c — число компонент связности графа G.*

Д о к а з а т е л ь с т в о. Действительно, если i-я компонента связности C_i графа G содержит n_i вершин, то по теореме 4.8.1 соответствующее дерево K_i остова содержит $n_i - 1$ ребро. Следовательно, для

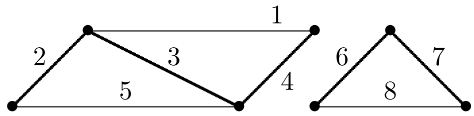


Рис. 3.31

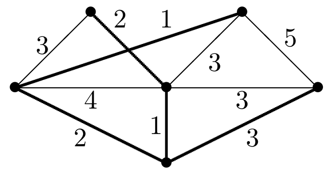


Рис. 3.32

получения K_i из компоненты C_i нужно удалить $m_i - (n_i - 1)$ ребер, где m_i — число ребер в C_i. Суммируя удаляемые ребра по всем компонентам связности и замечая, что $\sum\limits_{i=1}^{c} m_i = m$, $\sum\limits_{i=1}^{c} n_i = n$, получаем, что необходимо удалить $\sum\limits_{i=1}^{c}(m_i - n_i + 1) = m - n + c$ ребер. $\square$

Число $\nu(G) = m - n + c$ называется *цикломатическим числом* или *циклическим рангом* графа G. Число $\nu^*(G) = n - c$ называется *коциклическим рангом* или *корангом*. Таким образом, $\nu^*(G)$ есть число ребер, входящих в любой остов графа G, и $\nu(G) + \nu^*(G) = m$.

Очевидны следующие два следствия.

Следствие 3.8.3. *Неорграф G является лесом тогда и только тогда, когда $\nu(G) = 0$.*

Следствие 3.8.4. *Неорграф G имеет единственный цикл тогда и только тогда, когда $\nu(G) = 1$.*

Опишем алгоритм нахождения остова минимального веса во взвешенном графе. Эта задача возникает при проектировании линий электропередач, дорог и т. п., когда требуется заданные центры (вершины) соединить некоторой системой каналов связи (ребер) так, чтобы любые два центра были связаны либо непосредственно соединяющим их каналом (ребром), либо через другие центры и каналы, т. е. цепью, у которой общая длина (или, например, стоимость) каналов связи была минимальной. Искомая сеть будет остовом минимального веса полного графа.

Алгоритм, решающий *задачу нахождения остова минимального веса* во взвешенном графе $G = \langle M; R\rangle$, заключается в следующем.

1. Строим граф T_1, состоящий из множества вершин M и единственного ребра u_1, которое имеет минимальный вес.

2. Если граф T_i уже построен и $i < n - c$, где $n = |M|$, $c = c(G)$, то строим граф T_{i+1}, добавляя к множеству ребер графа T_i ребро u_{i+1}, имеющее минимальный вес среди ребер, не входящих в T_i и не составляющих циклов с ребрами из T_i.

Приведенный алгоритм, в частности, позволяет находить остов в невзвешенном графе, положив $w(u_i) = 1$ для всех ребер $u_i \in R$.

П р и м е р 3.8.2. На рис. 3.32 показан остов минимального веса взвешенного графа. Вес остова равен 9. □

При решении прикладных задач часто возникает необходимость обхода вершин графа, связанная с поиском вершин, удовлетворяющих определенным свойствам.

Пусть $G = \langle M; R\rangle$ — связный неориентированный граф, T — некоторый остов графа G, a — некоторая фиксированная вершина, называемая *корнем дерева* T. Разместим вершины из M по этажам таким образом, чтобы корень a находился в верхнем этаже, смежные с ним вершины занимали этаж на единицу ниже, смежные с отмеченными вершинами — еще на единицу ниже и т. д. (рис. 3.33). Таким образом, получаем $e(a)+1$ этажей, где $e(a)$ — эксцентриситет вершины a.

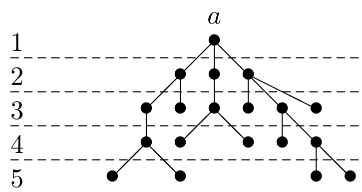


Рис. 3.33

Опишем *обход графа по глубине*. При таком обходе после очередной рассмотренной вершины выбирается смежная с ней вершина следующего этажа. Если очередная рассмотренная вершина висячая и ее достижение не дает желаемого решения задачи, то возвращаемся до ближайшей вершины степени $\geqslant 3$ и просматриваем вершины другого, еще не пройденного маршрута в таком же порядке и т. д.

На рис. 3.34 показана очередность обхода вершин по глубине графа, изображенного на рис. 3.33.

При *обходе графа по ширине* просмотр вершин дерева ведется по этажам, переход к вершинам следующего этажа производится только после просмотра всех вершин данного этажа. На рис. 3.35 показан порядок обхода по ширине графа, изображенного на рис. 3.33.

Очевидно, что при обходе всех вершин оба подхода: поиск в глубину и поиск по ширине — эквивалентны. Если же достаточно найти одну

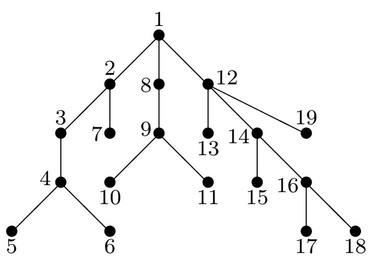


Рис. 3.34

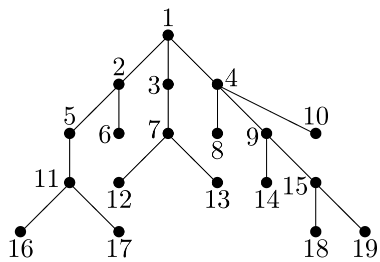


Рис. 3.35

вершину с определенным свойством, то целесообразность применения поиска решения по глубине или по ширине определяется структурой дерева. Если дерево является достаточно широким, а висячие вершины расположены на сравнительно близких этажах, то целесообразно вести поиск по глубине. Для глубоких узких деревьев, когда висячие вершины могут встретиться на различных этажах и их разброс по этажам достаточно велик, предпочтение отдается поиску по ширине.

Отметим, что при компьютерной реализации обходов по глубине и ширине целесообразно использовать задание дерева структурой смежности вершин.

§ 3.9. Фундаментальные циклы

Пусть $G = \langle M; R\rangle$ — неорграф, имеющий n вершин, m ребер и c компонент связности, T — остов графа G. В § 3.8 отмечалось, что T имеет $\nu^*(G) = n-c$ ребер $u_1, \ldots, u_{n-c}$, которые будем называть *ветвями* остова T. Оставшиеся $m-n+c$ ребер $v_1, v_2, \ldots, v_{m-n+c}$, не входящие в T, будем называть *хордами* остова T. Согласно теореме 3.8.1, п. 5, если к лесу T добавить произвольную хорду v_i, то в полученном графе найдется ровно один цикл, который обозначим через C_i. Цикл C_i состоит из хорды v_i и некоторых ветвей остова T, которые принадлежат единственной простой цепи, соединяющей вершины хорды v_i. Цикл C_i называется *фундаментальным циклом* графа G относительно хорды v_i остова T. Множество $\{C_1, \ldots, C_{m-n+c}\}$ всех фундаментальных циклов относительно хорд остова T называется *фундаментальным множеством циклов* графа G относительно остова T. Отметим, что мощность фундаментального множества циклов равна цикломатическому числу $\nu(G) = m - n + c$.

Обозначим через $(w_1, w_2, \ldots, w_m)$ последовательность $(v_1,\ v_2,\ \ldots,$ $v_{m-n+c},\ u_1,\ u_2,\ \ldots,\ u_{n-c})$ всех ребер графа G. Тогда фундаментальному циклу C_i соответствует вектор $\overline{a} = (a_{i1}, \ldots, a_{im})$, определенный по следующему правилу:

$$a_{ij} = \begin{cases} 1, & \text{если } w_j \in C_i, \\ 0, & \text{если } w_j \notin C_i. \end{cases}$$

Теперь фундаментальное множество циклов можно задать с помощью *матрицы фундаментальных циклов*, строки которой являются векторами $\overline{a}_1, \overline{a}_2, \ldots, \overline{a}_{\nu(G)}$:

$$C \rightleftharpoons \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1m} \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2m} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{\nu(G),1} & a_{\nu(G),2} & \ldots & a_{\nu(G),m} \end{pmatrix}.$$

Так как каждый фундаментальный цикл C_i содержит ровно одну хорду, а именно v_i, то матрица C имеет вид

$$C = \left(\begin{array}{cccc|ccc} 1 & & & 0 & a_{1,\nu(G)+1} & \ldots & a_{1m} \\ & 1 & & & a_{2,\nu(G)+1} & \ldots & a_{2m} \\ & & \ddots & & \ldots & \ldots & \ldots \\ 0 & & & 1 & a_{\nu(G),\nu(G)+1} & \ldots & a_{\nu(G)m} \end{array}\right).$$

Таким образом, $C = (C_1|C_2)$, где C_1 — единичная матрица порядка $\nu(G)$.

П р и м е р 3.9.1. Найдем матрицу фундаментальных циклов графа G, изображенного на рис. 3.36. Так как $\nu(G) = 8 - 6 + 1 = 3$, то для получения остова удаляем из графа три ребра. Сопоставим этим ребрам номера 1, 2, 3.

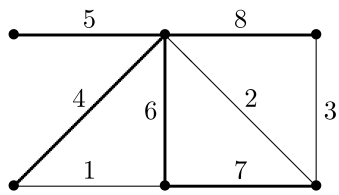


Рис. 3.36

Ребрам, входящим в остов, поставим в соответствие номера 4, 5, 6, 7, 8. Легко видеть, что фундаментальный цикл C_1, соответствующий хорде 1, состоит из ребер 1, 4, 6, цикл C_2 — из ребер 2, 6, 7, цикл C_3 — из ребер 3, 6, 7, 8. Поэтому матрица фундаментальных циклов C имеет вид

$$C = \begin{array}{c} \\ C_1 \\ C_2 \\ C_3 \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{cccccccc} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 \end{array} \\ \left(\begin{array}{ccc|ccccc} 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \end{array}\right) \end{array}.$$

§ 3.10. Разрезы

Понятие разреза играет важную роль при изучении вопросов, связанных с отделением одного множества вершин графа от другого. Такие задачи возникают, например, при изучении потоков в сетях (*сетью* называется связный орграф $G = \langle M; R\rangle$ без петель; *потоком* в сети G называется функция $\varphi : R \to \mathbb{Z}$, которая ставит в соответствие дуге некоторое число — вес дуги). В этих задачах фундаментальную роль играют изучение поперечных сечений сети (т. е. множеств дуг, которые соединяют вершины двух непересекающихся множеств вершин) и нахождение ограниченного поперечного сечения, которое является самым узким местом. Эти узкие места определяют пропускную способность системы в целом.

Пусть $G = \langle M; R\rangle$ — неорграф $\mathfrak{M} = \{M_1, M_2\}$ — разбиение множества M. *Разрезом* графа G (по разбиению $\mathfrak{M}$) называется множество всех ребер, соединяющих вершины из M_1 с вершинами из M_2 (рис. 3.37). Отметим, что в связном графе любой разрез непуст.

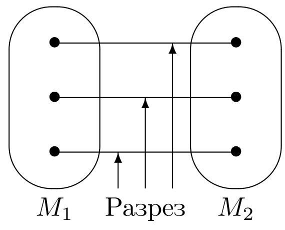


Рис. 3.37

Непустой разрез K неорграфа G называется *простым разрезом* или *коциклом*, если любое непустое собственное подмножество $K' \subsetneqq K$ не является разрезом ни по какому разбиению. Другими словами, из K нельзя удалить ни одно ребро с тем, чтобы полученное множество было непустым разрезом.

Теорема 3.10.1. *В конечном неорграфе $G = \langle M; R\rangle$, имеющем с компонент связности, множество ребер K тогда и только тогда является коциклом, когда граф $\langle M; R \setminus K\rangle$ имеет $(c+1)$ компонент связности.*

Понятия остова и коцикла являются противоположными в том смысле, что остову соответствует минимальное множество ребер, которые связывают посредством маршрутов все вершины связного графа, а коцикл состоит из минимального множества ребер, отделяющего некоторые вершины связного графа от остальных.

Следующие две почти очевидные теоремы дают информацию о связи остовов с разрезами, а также циклов с разрезами.

Теорема 3.10.2. *В связном неорграфе остовное дерево имеет по крайней мере одно общее ребро с любым из разрезов графа.*

Теорема 3.10.3. *В связном неорграфе любой цикл имеет с любым разрезом четное число общих ребер.*

В условиях, указанных в предыдущем параграфе, рассмотрим неорграф G с остовом T. Снова пусть u_1, u_2, …, u_{n-c} — ветви остова T. Удаляя из остова T произвольную ветвь u_i, получаем лес с $(c+1)$ компонентами связности, т. е. каждое ребро u_i
является разрезом остова T по некоторому разбиению $\{M_1, M_2\}$ (рис. 3.38).

В графе G могут найтись еще какие-то ребра v_{i_1}, v_{i_2}, …, v_{i_j} (являющиеся хордами T), которые соединяют вершины из M_1 и M_2. Множество $K_i = \{u_i, v_{i_1}, \ldots, v_{i_j}\}$ образует простой разрез, который называется *фундаментальным разрезом* графа G относительно ветви u_i

остова T. Множество $\{K_1, K_2, \ldots, K_{n-c}\}$ всех фундаментальных разрезов графа G называется *фундаментальным множеством коциклов* графа G относительно остова T. Отметим, что мощность фундаментального множества коциклов не зависит от выбора остова T и равна корангу $\nu^*(G) = n - c$.

Аналогично фундаментальным циклам каждому фундаментальному разрезу K_i ставится в соответствие вектор $\overline{b}_i = (b_{i1}, \ldots \ldots, b_{im})$, определяемый по правилу

$$b_{ij} = \begin{cases} 1, & \text{если } w_j \in K_i, \\ 0, & \text{если } w_j \notin K_i. \end{cases}$$

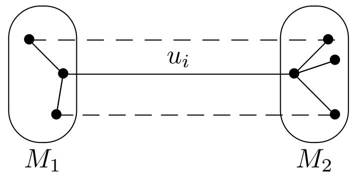


Рис. 3.38

Фундаментальное множество коциклов задается *матрицей фундаментальных разрезов* K, строки которой являются векторами $\overline{b}_1$, $\overline{b}_2$, ..., $\overline{b}_{\nu^*(G)}$:

$$K = \begin{pmatrix} b_{11} & \ldots & b_{1m} \\ b_{21} & \ldots & b_{2m} \\ \ldots & \ldots & \ldots \\ b_{\nu^*(G),1} & \ldots & b_{\nu^*(G),m} \end{pmatrix}.$$

Поскольку каждый фундаментальный разрез K_i содержит ровно одну ветвь, а именно u_i, матрица K имеет вид

$$K = \left(\begin{array}{ccc|cccc} b_{11} & \ldots & b_{1,\nu^*(G)} & 1 & & & 0 \\ b_{21} & \ldots & b_{2,\nu^*(G)} & & 1 & & \\ \ldots & \ldots & \ldots & & & \ddots & \\ b_{\nu^*(G),1} & \ldots & b_{\nu^*(G),\nu^*(G)} & 0 & & & 1 \end{array}\right).$$

Таким образом, $K = (K_1|K_2)$, где K_2 — единичная матрица порядка $\nu^*(G)$. Отметим, что если $C = (C_1|C_2)$ — соответствующая матрица фундаментальных циклов, то $K_1 = C_2^{\mathrm{T}}$.

Пример 3.10.1. Найдем матрицу фундаментальных разрезов графа $G = \langle M; R\rangle$, изображенного на рис. 3.36. Поскольку $\nu^*(G) = 6 - 1 = 5$, имеется пять фундаментальных разрезов. Ребру 4 соответствует коцикл $K_1 = \{1, 4\}$, так как при удалении ребра 4 из остова T множество вершин M разбивается на две части: $\{a_1\}$ и $M \setminus \{a_1\}$, а ребра 1 и 4 образуют разрез по разбиению $\{\{a_1\}, M \setminus \{a\}\}$. Аналогично ребру 5 соответствует коцикл $K_2 = \{5\}$, ребру 6 — коцикл $K_3 = \{1, 2, 3, 6\}$, ребру 7 — коцикл $K_4 = \{2, 3, 7\}$, ребру 8 — коцикл $K_5 = \{3, 8\}$. Следовательно, матрица фундаментальных разрезов имеет вид

$$K = \begin{array}{c} \\ K_1 \\ K_2 \\ K_3 \\ K_4 \\ K_5 \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{ccc|ccccc} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 \end{array} \\ \left(\begin{array}{ccc|ccccc} 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \end{array}.$$

Отметим также, что при умножении матрицы фундаментальных циклов C на транспонированную матрицу фундаментальных разрезов K^{T} в поле $\mathbb{Z}_2$ строка $\overline{a}_i$ умножается на столбец $\overline{b}_j$ по правилу внутреннего произведения и $(\overline{a}_i, \overline{b}_j) = 0$. Это означает, что $C \cdot K^{\mathrm{T}} = 0$, а также $K \cdot C^{\mathrm{T}} = 0$.

Упражнение. Проверить, что для матриц C и K из примеров 3.9.1 и 3.10.1 справедливо $C \cdot K^{\mathrm{T}} = 0$.

§ 3.11. Раскраски графов

Пусть $G = \langle M; R \rangle$ — неорграф без петель. *Раскраской* (*вершин*) графа G называется такое задание цветов вершинам G, что если $[a, b]$ — ребро, то вершины a и b имеют различные цвета. *Хроматическим числом* $\chi(G)$ графа G называется минимальное число цветов, требующееся для раскраски G.

Пример 3.11.1. Так как в полном графе K_n любые две различные вершины связаны ребром, то $\chi(K_n) = n$. □

Многие практические задачи сводятся к построению раскрасок графов.

Пример 3.11.2. 1. Рассмотрим задачу составления расписания. Предположим, что нужно прочесть несколько лекций за кратчайшее время. Чтение каждой лекции в отдельности занимает один час, но некоторые лекции не могут читаться одновременно (например, их читает один и тот же лектор). Построим граф G, вершины которого биективно соответствуют лекциям и две вершины смежны тогда и только тогда, когда соответствующие им лекции нельзя читать одновременно. Очевидно, что любая раскраска этого графа определяет допустимое расписание: лекции, соответствующие вершинам одного цвета, могут читаться одновременно. Напротив, любое допустимое расписание определяет раскраску графа G. Оптимальные расписания соответствуют раскраскам с минимальным числом цветов, а число часов, необходимое для прочтения всех лекций, равно $\chi(G)$.

2. Рассмотрим граф G, вершины которого — страны, а ребра соединяют страны, имеющие общую границу. Числу $\chi(G)$ соответствует наименьшее число красок, необходимых для раскраски карты так, чтобы никакие две соседние страны не были окрашены в один цвет. $\square$

Существуют и практические задачи, связанные с раскраской ребер в мультиграфе.

Раскраска ребер в мультиграфе G может быть определена с помощью раскраски вершин так называемого реберного мультиграфа $L(G)$. Для произвольного неориентированного мультиграфа $G = \langle M, U, P\rangle$ *реберным мультиграфом* $L(G)$ называется тройка $\langle U, M, P'\rangle$, где $P' \subseteq U \times M \times U$, и выполняется $(u, a, v) \in P'$ тогда и только тогда, когда в мультиграфе G вершина a является концом ребер u и v. *Раскраской ребер* мультиграфа G называется раскраска вершин мультиграфа $L(G)$.

Пример 3.11.3. Проводится монтаж аппаратуры. Чтобы не перепутать проводники, необходимо их окрасить таким образом, чтобы два проводника, идущие к одной плате, имели разные цвета. В этом случае вершинами являются платы, а ребрами — проводники. $\square$

Неорграф G называется *бихроматическим*, если $\chi(G) = 2$. Неорграф $G = \langle M; R\rangle$ называется *двудольным*, если множество всех ребер графа G образует разрез графа G, т. е. для некоторого разбиения множества вершин $\{M_1, M_2\}$ концы любого ребра принадлежат разным частям разбиения.

Теорема 3.11.1. *Пусть G — неорграф без петель, имеющий хотя бы одно ребро. Тогда следующие условия эквивалентны:*

1) *G — бихроматический граф;*
2) *G — двудольный граф;*
3) *G не содержит циклов нечетной длины.*

Следствие 3.11.2. *Если G — лес, то $\chi(G) \leqslant 2$.*

Оценим хроматическое число графа G через его параметры. Обозначим через $\deg(G)$ максимальную степень вершин графа G.

Теорема 3.11.3. *Для любого неорграфа G без петель выполняется неравенство $\chi(G) \leqslant \deg(G) + 1$.*

Рассмотрим простой алгоритм построения раскраски, который во многих случаях приводит к раскраскам, близким к минимальным.

Алгоритм последовательной раскраски.

1. Произвольная вершина a_1 графа G принимает цвет 1.

2. Если вершины $a_1, \ldots, a_i$ раскрашены l цветами $1, 2, \ldots, l$, $l \leqslant i$, то новой произвольно взятой вершине a_{i+1} припишем минимальный

цвет, не использованный при раскраске вершин из множества $\{a_j \mid \rho(a_{i+1}, a_j) = 1,\ j < i\}$. $\square$

Для некоторых классов графов последовательная раскраска является минимальной. В общем случае это не так.

§ 3.12. Планарные графы

Неорграф G называется *планарным*, если его можно изобразить на плоскости так, что никакие два ребра не будут иметь общих точек, кроме, может быть, общего конца этих ребер. Такое изображение графа на плоскости называется *плоским*. Таким образом, если граф имеет плоское изображение, то он является планарным.

П р и м е р 3.12.1. Граф K_4 (рис. 3.39*а*) планарен, поскольку может быть изображен, как показано на рис. 3.39*б*. $\square$

Граф, описанный в примере 3.11.2, п. 2, является планарным. Также планарным является граф, вершины которого — отверстия печатной платы, а ребра — проводники печатной платы, соединяющие отверстия.

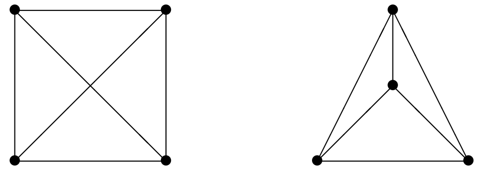
Рассмотрим операцию *подразбиения ребра* в графе $G = \langle M; R\rangle$. После подразбиения ребра $[a, b] \in R$ получается граф $G' = \langle M'; R'\rangle$, где $M' = M \cup \{ab\}$, $R' = (R \setminus [a, b]) \cup [a, ab] \cup [ab, b]$, т. е. ребро $[a, b]$ заменяется на (a, b)-цепь длины два. Два графа называются *гомеоморфными*, если их можно получить из одного графа с помощью последовательности подразбиений ребер.

Не всякий неорграф является планарным. Критерий планарности описывает

Теорема 3.12.1 (теорема Понтрягина—Куратовского). *Граф G планарен тогда и только тогда, когда G не содержит подграфа, гомеоморфного K_5 или $K_{3,3}$* (рис. 3.40).

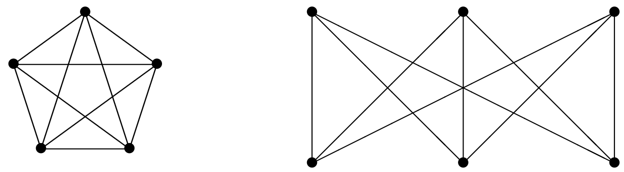
Эквивалентная форма критерия планарности описана в следующей теореме.

Теорема 3.12.2. *Тогда и только тогда неорграф G планарен, когда G не содержит подграфов, стягиваемых (т.е. получаемых по-*



а *б*

Рис. 3.39



K_5 $K_{3,3}$

Рис. 3.40

следовательностью отождествлений вершин, связанных ребрами) к графу K_5 *или* $K_{3,3}$ (рис. 3.40).

Вместе с тем трехмерного евклидова пространства оказывается достаточно для изображения любого конечного и счетного графа без пересечения дуг вне их концов.

Теорема 3.12.3. *Любой граф, состоящий не более чем из* 2^ω *вершин, может быть изображен в пространстве* $\mathbb{R}^3$ *без пересечения дуг вне их концов.*

Доказательство. Пусть $G = \langle M; R\rangle$ — граф, для которого $|M| \leqslant 2^\omega$. Тогда имеем $|R| \leqslant 2^\omega$. Расположим все точки графа G на некоторой прямой l и каждой дуге из R разнозначно сопоставим плоскость, содержащую прямую l. Искомое изображение графа G получается после проведения всех дуг в соответствующих плоскостях. □

Известна оценка хроматического числа планарных графов.

Теорема 3.12.4 (теорема о четырех красках). *Если* G *— планарный граф, то* $\chi(G) \leqslant 4$.

При исследовании принципиальной электрической схемы радиоэлектронного устройства с точки зрения возможности ее реализации с помощью печатного монтажа или монтажа на слоях микросхемы важно знать ответ на следующие вопросы: 1) является ли граф, соответствующий рассматриваемой принципиальной схеме, планарным? 2) если граф планарен, то как получить его изображение без пересечения ребер? На первый вопрос принципиальный ответ дает теорема Понтрягина—Куратовского, а методы получения плоских изображений планарных графов можно найти в специальной литературе.

Если граф G непланарен, то для его геометрической реализации удаляют отдельные ребра (переносят на другую плоскость). Минимальное число ребер, которое необходимо удалить из графа для получения его плоского изображения, называется *числом планарности графа* G. При вынесении этих ребер на вторую плоскость получают часть графа, которая также может оказаться неплоской. Тогда вновь решают задачу вынесения отдельных ребер на следующую плоскость и т. д. Минимальное число плоскостей m, при котором граф G разбивается на плоские части $G_1, G_2, \ldots, G_m$ (разбиение ведется по множеству ребер), называется *толщиной графа* G.

Таким образом, толщина планарного графа равна 1.

П р и м е р 3.12.2. Каждый из графов K_5 и $K_{3,3}$ имеет толщину 2.

§ 3.13. Задачи и упражнения

1. Представить граф (рис. 3.41) в аналитической и матричной формах, списком дуг и структурой смежности.

2. Составить матрицу инцидентности для мультиграфа, изображенного на рис. 3.42.

3. Найти все неизоморфные подграфы и части графа K_3.

4. Представить в геометрической и матричной формах графы $G_1\cup \cup G_2$, $G_1\cap G_2$, $G_1 \oplus G_2$ (рис. 3.43).

5. Для графов G_1 и G_2 из предыдущей задачи найти $G_1 \times G_2$, $G_1[G_2]$ и $G_2[G_1]$.

6. С помощью матрицы смежности графа (рис. 3.44) найти его матрицы достижимости, контрдостижимости и сильных компонент.

7. Найти матрицу расстояний, диаметр, радиус, центральные и периферийные вершины графа, изображенного на рис. 3.45.

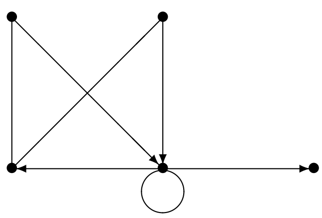


Рис. 3.41

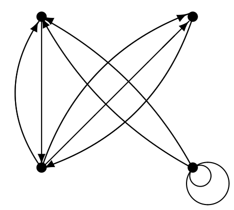


Рис. 3.42

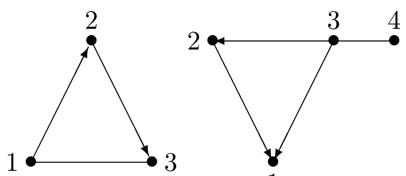


Рис. 3.43

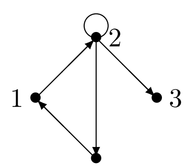


Рис. 3.44

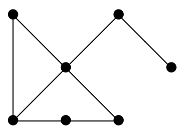


Рис. 3.45

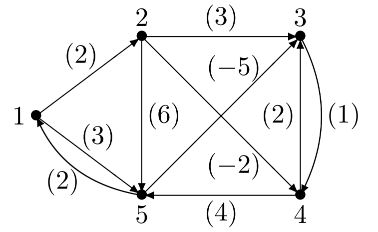


Рис. 3.46

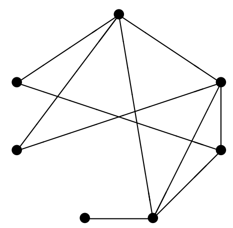


Рис. 3.47

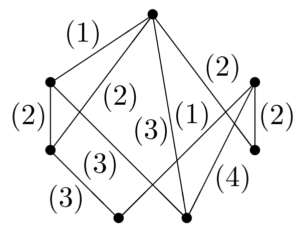


Рис. 3.48

8. Найти все кратчайшие маршруты из вершины 2 для взвешенного графа (рис. 3.46).

9. Доказать, что в любом конечном бесконтурном графе существуют вершины с нулевой полустепенью исхода и с нулевой полустепенью захода.

10. Проверить на эйлеровость и найти минимальное множество покрывающих цепей:

    а) графа K_5; б) графа, изображенного на рис. 3.47.

11. Построить все неизоморфные трех-, четырех- и пятивершинные деревья.

12. Найти остов минимального веса взвешенного графа (рис. 3.48).

13. Найти упорядоченный лес, соответствующий бинарному дереву, изображенному на рис. 3.49.

14. Найти матрицы фундаментальных циклов и фундаментальных разрезов графа (рис. 3.50).

15. Найти хроматическое число графа (рис. 3.51).

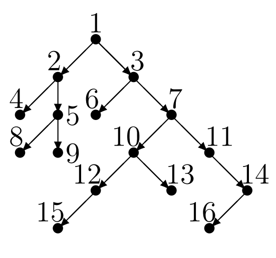


Рис. 3.49

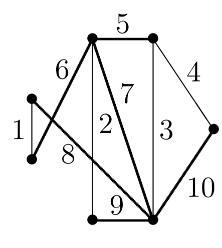


Рис. 3.50

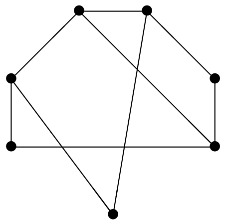


Рис. 3.51

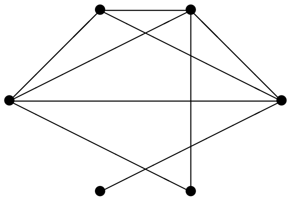


Рис. 3.52

16. Найти толщину графа (рис. 3.52).

После изучения главы 3 выполняются задачи 8 и 9 контрольной работы. Задача 8 решается аналогично примерам 3.2.4, 3.2.6, 3.1.4, 3.1.5, 3.3.4 и 3.3.5, а задача 9 — аналогично примерам 3.4.1, 3.4.2, 3.7.1, 3.9.1, 3.10.1 и 3.12.1.

Г л а в а 4

АЛГЕБРА ЛОГИКИ

§ 4.1. Формулы алгебры логики

Высказыванием называется повествовательное предложение, о котором в данной ситуации можно сказать, что оно истинно или ложно, но не то и другое одновременно.

В качестве примеров высказываний приведем предложения “НГТУ — крупнейший вуз Новосибирска” и “Снег зеленый”. Первое высказывание является истинным, а второе — ложным.

Поставим в соответствие высказыванию P *логическую переменную* x, которая принимает значение 1, если P истинно, и 0, если P ложно.

Если имеется несколько высказываний, то из них можно образовать различные новые высказывания. При этом исходные высказывания называются *простыми*, а вновь образованные — *сложными*. Соответственно из логических переменных можно составлять различные конструкции, которые образуют формулы алгебры логики.

Итак, пусть $\{x_i \mid i \in I\}$ — некоторое множество логических переменных. Определим по индукции понятие *формулы алгебры логики*:

1) любая логическая переменная является формулой (называемой *атомарной*);

2) если φ и ψ — формулы, то выражения $\neg\varphi$, $(\varphi \wedge \psi)$, $(\varphi \vee \psi)$, $(\varphi \to \psi)$, $(\varphi \leftrightarrow \psi)$ являются формулами;

3) никаких других формул, кроме построенных по пп. 1 и 2, нет.

Если формула φ построена из логических переменных, лежащих в множестве $\{x_1, x_2, \ldots, x_n\}$, то будем писать $\varphi(x_1, \ldots, x_n)$.

Символы $\neg$, $\wedge$, $\vee$, $\to$, $\leftrightarrow$, использованные в определении, называются *логическими операциями* или *связками* и читаются соответственно: *отрицание*, *конъюнкция*, *дизъюнкция*, *импликация* и *эквивалентность*.

Введенные в п. 2 формулы следующим образом интерпретируются в русском языке: $\neg\varphi$ — “не φ”, $(\varphi \wedge \psi)$ — “φ и ψ”, $(\varphi \vee \psi)$ — “φ или

ψ", $(\varphi \to \psi)$ — "если φ, то ψ", $(\varphi \leftrightarrow \psi)$ — "φ тогда и только тогда, когда ψ".

Вместо $\neg\varphi$ часто пишут $\overline{\varphi}$, вместо $(\varphi \wedge \psi)$ — $(\varphi \& \psi)$, $(\varphi \cdot \psi)$ или $(\varphi\psi)$.

Действия логических операций задаются *таблицами истинности*, каждой строке которых взаимно однозначно сопоставляется набор значений переменных, составляющих формулу, и соответствующее этому набору значение полученной формулы:

φ	$\neg\varphi$
0	1
1	0

φ	ψ	$(\varphi \wedge \psi)$	$(\varphi \vee \psi)$	$(\varphi \to \psi)$	$(\varphi \leftrightarrow \psi)$
0	0	0	0	1	1
0	1	0	1	1	0
1	0	0	1	0	0
1	1	1	1	1	1

Приведенные таблицы истинности называются также *интерпретациями* логических операций и составляют семантику формул (т.е. придание смысла формулам) в отличие от синтаксиса формул (т.е. формальных законов их построения, данных в определении формулы).

Исходя из таблиц истинности для логических операций можно строить таблицы истинности для произвольных формул.

П р и м е р 4.1.1. Построить таблицу истинности для формулы $\varphi = ((x \to y) \wedge ((\overline{y} \to z) \to \overline{x}))$.

Будем строить таблицу истинности последовательно в соответствии с шагами построения формулы φ:

x	y	z	$(x \to y)$	$(\overline{y} \to z)$	$((\overline{y} \to z) \to \overline{x})$	φ
0	0	0	1	0	1	1
0	0	1	1	1	1	1
0	1	0	1	1	1	1
0	1	1	1	1	1	1
1	0	0	0	0	1	0
1	0	1	0	1	0	0
1	1	0	1	1	0	0
1	1	1	1	1	0	0

Легко заметить, что таблица истинности для φ совпадает с таблицей истинности для $\overline{x}$. В дальнейшем выяснится причина этого совпадения. □

Расширим понятие формулы, введя новые, не менее важные логические операции:

— $(\varphi|\psi)$ — *штрих Шеффера* или *антиконъюнкция*, по определению $(\varphi|\psi) \rightleftharpoons \neg(\varphi \wedge \psi)$;

— $(\varphi \downarrow \psi)$ — *стрелка Пирса* или *антидизъюнкция*, по определению $(\varphi \downarrow \psi) \rightleftharpoons \neg(\varphi \vee \psi)$;

— $(\varphi \oplus \psi)$ — *кольцевая сумма*, *логическое сложение* или *сложение по модулю* 2, по определению $(\varphi \oplus \psi) \rightleftharpoons \neg(\varphi \leftrightarrow \psi)$.

Составим исходя из определений таблицы истинности для этих трех операций:

φ	ψ	$(\varphi\vert\psi)$	$(\varphi\downarrow\psi)$	$(\varphi\oplus\psi)$
0	0	1	1	0
0	1	1	0	1
1	0	1	0	1
1	1	0	0	0

Как видно из примера 4.1.1, даже при составлении несложных формул возникает обилие скобок. Чтобы избежать этого, в алгебре логики, так же как и в арифметике, приняты некоторые соглашения относительно расстановки скобок. Перечислим эти соглашения.

1. Внешние скобки не пишутся. Например, вместо высказывания $((x \vee y) \to z)$ пишется $(x \vee y) \to z$.

2. На множестве $\{\neg, \wedge, \vee, \to, \leftrightarrow, |, \downarrow, \oplus\}$ вводятся транзитивное отношение $<$ “быть более сильным” и отношение эквивалентности $\sim$ “быть равносильным” по правилам, показанным на рис. 4.1.

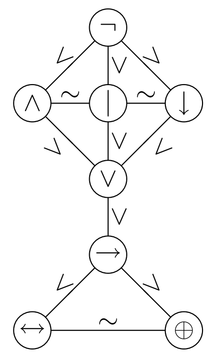


Рис. 4.1

Согласно этим отношениям недостающие скобки в формуле расставляются последовательно, начиная с наиболее сильных связок и кончая наиболее слабыми, а для равносильных связок расстановка скобок выполняется слева направо.

П р и м е р 4.1.2. В формуле $x \wedge y \vee z$ скобки расставляются следующим образом: $((x \wedge y) \vee z)$; в формуле $x \vee y \leftrightarrow z \to u$ — $((x \vee y) \leftrightarrow (z \to u))$, в формуле $x \oplus y \leftrightarrow \overline{z} \to u \vee v \wedge w \downarrow x|y$ — $((x \oplus y) \leftrightarrow (\overline{z} \to (u \vee (((v \wedge w) \downarrow x)|y))))$. $\square$

Отметим, что, например, в формуле $x \to (\overline{y} \to z)$ скобки убирать нельзя, поскольку в силу наших соглашений формуле $x \to \overline{y} \to z$ соответствует формула $(x \to \overline{y}) \to z$.

§ 4.2. Функции алгебры логики

В предыдущем параграфе мы выяснили, что семантически формулы полностью характеризуются таблицами истинности. При этом можно забыть о синтаксической структуре самих формул и иметь дело с таблицами истинности. Таким образом, мы приходим к понятию функции алгебры логики, которое и будет исследоваться в дальнейшем.

Функцией алгебры логики (ФАЛ) от n переменных $x_1, x_2, \ldots, x_n$ называется любая функция $f : \{0,1\}^n \to \{0,1\}$, т. е. функция,

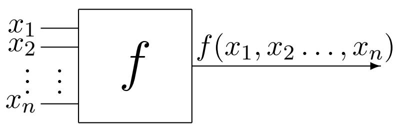


Рис. 4.2

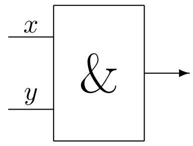


Рис. 4.3

которая произвольному набору $(\delta_1, \delta_2, \ldots, \delta_n)$ нулей и единиц ставит в соответствие значение $f(\delta_1, \delta_2, \ldots, \delta_n) \in \{0, 1\}$.

Функции алгебры логики называются также *булевыми функциями*, *двоичными функциями* и *переключательными функциями*.

Булевой функцией описываются преобразования некоторым устройством входных сигналов в выходные. Предположим, что устройство, показанное на рис. 4.2, имеет n входов $x_1, x_2, \ldots, x_n$, на которые может подаваться или не подаваться ток, и один выход, на который ток подается или не подается в зависимости от подачи тока на входы. При этом значение переменной $x_i = 1$ интерпретируется как поступление тока на i-й вход, а $x_i = 0$ — как непоступление тока. Значение $f(\delta_1, \delta_2, \ldots, \delta_n)$ равно 1, если при $x_1 = \delta_1, \ldots, x_n = \delta_n$ ток на выход проходит, и $f(\delta_1, \delta_2, \ldots, \delta_n) = 0$, если ток не проходит.

Например, операции конъюнкции $x \wedge y$ соответствует устройство с двумя входами и одним выходом. При этом значение выхода равно 1, тогда и только тогда, когда оба значения входов равны 1 (рис. 4.3).

Булева функция $f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ полностью определяется своей *таблицей истинности*:

x_1	x_2	x_3	$\ldots$	x_{n-1}	x_n	$f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$
0	0	0	$\ldots$	0	0	$f(0, 0, \ldots, 0, 0)$
0	0	0	$\ldots$	0	1	$f(0, 0, \ldots, 0, 1)$
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$
1	1	1	$\ldots$	1	0	$f(1, 1, \ldots, 1, 0)$
1	1	1	$\ldots$	1	1	$f(1, 1, \ldots, 1, 1)$

В каждой строке таблицы вначале задается набор значений переменных $(\delta_1, \delta_2, \ldots, \delta_n)$, а затем — значение функции на этом наборе.

Если булева функция f и формула φ имеют одну и ту же таблицу истинности, то будем говорить, что *формула φ представляет функцию f*.

Булева функция также однозначно задается перечислением всех наборов, на которых она принимает значение 0, либо перечислением всех наборов, на которых она принимает значение 1.

П р и м е р 4.2.1 (*голосование*). Рассмотрим устройство, фиксирующее принятие некоторой резолюции "комитетом трех". Каждый член комитета при одобрении резолюции нажимает свою кнопку. Если большинство членов согласны, то резолюция принимается. Это фиксируется регистрирующим прибором. Таким образом, устройство реализует функцию $f(x, y, z)$, таблица истинности которой имеет вид

x	0	0	0	0	1	1	1	1
y	0	0	1	1	0	0	1	1
z	0	1	0	1	0	1	0	1
$f(x,y,z)$	0	0	0	1	0	1	1	1

Полученную функцию f можно также задать следующей системой равенств: $f(0,0,0) = f(0,0,1) = f(0,1,0) = f(1,0,0) = 0$.

Вектором значений булевой функции $f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ называется упорядоченный набор всех значений функции f, при котором значения упорядочены по лексикографическому порядку множества аргументов $\{0,1\}^n$.

В примере 4.2.1 вектором значений булевой функции $f(x,\ y, z)$ является набор (0001 0111).

Отметим, что поскольку всего имеется 2^n наборов $(\delta_1, \ldots, \delta_n)$ нулей и единиц $(|\{0,1\}^n| = 2^n)$, существует ровно $2^{(2^n)}$ булевых функций $f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ от n переменных:

$$|\{f | f : \{0,1\}^n \to \{0,1\}\}| = |\{0,1\}|^{|\{0,1\}^n|} = 2^{2^n}$$

(см. операции над кардиналами в § 1.4).

Таким образом, имеется, например, 16 булевых функций от двух переменных, 256 — от трех и т. д.

Наборы $(\delta_1, \delta_2, \ldots, \delta_n)$ нулей и единиц можно представить в виде вершин n-мерных кубов (см. § 3.2) или в виде вершин *2-дерева* (рис. 4.4), каждая вершина которого представляет собой некоторый набор $(\delta_1, \delta_2, \ldots, \delta_n)$ нулей и единиц или пустое слово Λ. При этом с вершиной $(\delta_1, \delta_2, \ldots, \delta_{n-1},\ \delta_n)$, $n \geqslant 2$, смежны вершины $(\delta_1, \delta_2, \ldots, \delta_{n-1})$, $(\delta_1, \delta_2, \ldots, \delta_{n-1},\ 0)$, $(\delta_1, \delta_2, \ldots, \delta_{n-1}, 1)$, с вершиной δ_1 — Λ, $(\delta_1, 0)$ и $(\delta_1, 1)$, с вершиной Λ — 0 и 1. На каждом этаже изображенного 2-дерева

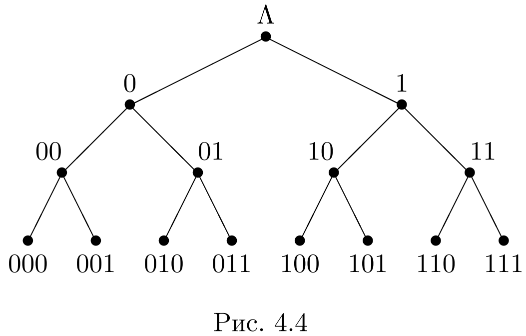


Рис. 4.4

располагаются всевозможные наборы $(\delta_1, \delta_2, \ldots, \delta_n)$ нулей и единиц фиксированной длины n.

Функция $f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ называется *суперпозицией функций* $g(y_1, \ldots, y_m)$ и $h_1(x_1, x_2, \ldots, x_n)$, ..., $h_m(x_1, x_2, \ldots, x_n)$, если

$$f(x_1, \ldots, x_n) = g(h_1(x_1, \ldots, x_n), \ldots, h_m(x_1, \ldots, x_n)).$$

П р и м е р 4.2.2. Функция f, соответствующая формуле $x_1x_2 \oplus x_2x_3 \oplus x_4x_1$, есть суперпозиция функции g, представляемой формулой $y_1 \oplus y_2 \oplus y_3$, и функций h_1, h_2, h_3, соответствующих формулам x_1x_2, x_2x_3, x_4x_1. $\square$

Булева функция $f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$, принимающая значение 1 (соответственно 0) на всех наборах нулей и единиц: $f(x_1, x_2, \ldots\ldots, x_n) \equiv 1$ (соответственно $f(x_1, x_2, \ldots, x_n) \equiv 0$), называется *константой* 1 (*константой* 0).

Опишем булеву алгебру $\mathfrak{B}_n$ функций алгебры логики от n переменных. В качестве носителя рассмотрим множество $B_n = \{f \mid f : \{0,1\}^n \to \{0,1\}\}$. Отношение $\leqslant$ на множестве B_n определим по следующему правилу: $f_1 \leqslant f_2 \Leftrightarrow f_1(X) \leqslant f_2(X)$ для любого набора значений $X = (\delta_1, \ldots, \delta_n)$. *Пересечением* $f \wedge g$ функций f и g называется такая функция h, что $h(X) = \min\{f(X), g(X)\}$ на любом наборе значений $X = (\delta_1, \ldots, \delta_n)$. *Объединением* $f \vee g$ функций f и g называется такая функция h, что $h(X) = = \max\{f(X), g(X)\}$ на любом наборе X. *Дополнение* $\overline{f}$ функции f определяется следующим образом:

$$\overline{f}(X) = \begin{cases} 0, & \text{если } f(X) = 1, \\ 1, & \text{если } f(X) = 0. \end{cases}$$

В качестве 0 рассмотрим функцию, являющуюся константой 0, а в качестве 1 возьмем константу 1. Система $\mathfrak{B}_n = \langle B_n; \wedge, \vee, \bar{}, 0, 1\rangle$ образует булеву алгебру функций алгебры логики от n переменных (*алгебру булевых функций*).

§ 4.3. Эквивалентность формул

Как показано в примере 4.1.1, различные формулы могут иметь одинаковые таблицы истинности. Так возникает понятие эквивалентности формул.

Формулы $\varphi(x_1, \ldots, x_n)$ и $\psi(x_1, \ldots, x_n)$ называются *эквивалентными* ($\varphi \sim \psi$), если совпадают их таблицы истинности, т. е. совпадают представляемые этими формулами функции $f_\varphi(x_1, \ldots, x_n)$ и $f_\psi(x_1, \ldots, x_n)$.

Пример 4.3.1. Построив таблицы истинности формул $x \to y$ и $\overline{y} \to \overline{x}$, убеждаемся в том, что $(x \to y) \sim (\overline{y} \to \overline{x})$. $\square$

Легко видеть, что отношение $\sim$ является отношением эквивалентности, т. е. оно рефлексивно $(\varphi \sim \varphi)$, симметрично $(\varphi \sim \sim \psi \Rightarrow \psi \sim \varphi)$ и транзитивно $(\varphi \sim \psi,\ \psi \sim \chi \Rightarrow \varphi \sim \chi)$.

Отметим основные эквивалентности между формулами:

1) $((\varphi \wedge \psi) \wedge \chi) \sim (\varphi \wedge (\psi \wedge \chi))$, $((\varphi \vee \psi) \vee \chi) \sim (\varphi \vee (\psi \vee \chi))$ (*ассоциативность* $\wedge$ и $\vee$);

2) $(\varphi \wedge \psi) \sim (\psi \wedge \varphi)$, $(\varphi \vee \psi) \sim (\psi \vee \varphi)$ (*коммутативность* $\wedge$ и $\vee$);

3) $(\varphi \wedge \varphi) \sim \varphi$, $(\varphi \vee \varphi) \sim \varphi$ (*идемпотентность* $\wedge$ и $\vee$);

4) $(\varphi \wedge (\psi \vee \chi)) \sim ((\varphi \wedge \psi) \vee (\varphi \wedge \chi))$, $(\varphi \vee (\psi \wedge \chi)) \sim ((\varphi \vee \psi)\wedge$ $\wedge(\varphi \vee \chi))$ (*законы дистрибутивности*);

5) $(\varphi \wedge (\varphi \vee \psi)) \sim \varphi$, $(\varphi \vee (\varphi \wedge \psi)) \sim \varphi$ (*законы поглощения*);

6) $\neg(\varphi \wedge \psi) \sim \neg\varphi \vee \neg\psi$, $\neg(\varphi \vee \psi) \sim \neg\varphi \wedge \neg\psi$ (*законы де Моргана*);

7) $\neg\neg\varphi \sim \varphi$ (*закон двойного отрицания*);

8) $\varphi \to \psi \sim \neg\varphi \vee \psi$;

9) $\varphi \leftrightarrow \psi \sim ((\varphi \to \psi) \wedge (\psi \to \varphi) \sim (\neg\varphi \vee \psi) \wedge (\neg\psi \vee \varphi)$;

10) $(\varphi \vee \neg\varphi\psi) \sim (\varphi \vee \psi)$, $(\neg\varphi \vee \varphi\psi) \sim (\neg\varphi \vee \psi)$;

11) $\varphi(\neg\varphi \vee \psi) \sim \varphi\psi$, $\neg\varphi(\varphi \vee \psi) \sim \neg\varphi\psi$.

Формула $\varphi(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ называется *выполнимой* (*опровержимой*), если существует такой набор значений переменных, при котором формула принимает значение 1 (соответственно 0).

Пример 4.3.2. Формула $x \wedge y$ является одновременно выполнимой и опровержимой, поскольку $0 \wedge 0 = 0$, а $1 \wedge 1 = 1$. $\square$

Формула $\varphi(x_1, \ldots, x_n)$ называется *тождественно истинной*, общезначимой или *тавтологией* (*тождественно ложной* или *противоречием*), если эта формула принимает значение 1 (соответственно 0) при всех наборах значений переменных, т. е. функция f является константой 1 (константой 0).

Пример 4.3.3. Формула $x \vee \overline{x}$ является тождественно истинной, а формула $x \wedge \overline{x}$ — тождественно ложной:

x	$x \vee \overline{x}$	$x \wedge \overline{x}$
0	1	0
1	1	0

.

Если φ — тождественно истинная формула, то будем писать $\models \varphi$. В противном случае пишем $\not\models \varphi$. Таким образом, $\models x \vee \overline{x}$, $\not\models x \wedge y$, и $\not\models x \wedge \overline{x}$.

Очевидным является следующее

Замечание 4.3.1. 1. *Формула φ тождественно ложна тогда и только тогда, когда $\neg\varphi$ тождественно истинна* ($\models \neg\varphi$);

2. *Формула* φ *опровержима тогда и только тогда, когда она не является тождественно истинной* ($\not\models \varphi$);

3. *Формула* φ *выполнима тогда и только тогда, когда она не является тождественно ложной.*

Отметим, что тождественно истинные (соответственно тождественно ложные) формулы образуют класс эквивалентности по отношению $\sim$.

Предложение 4.3.2. *Если формула* φ_1 *тождественно истинна,* φ_0 *— тождественно ложна, то для любых формул* φ *и* ψ *справедливы следующие эквивалентности:*

$\varphi \wedge \varphi_1 \sim \varphi$; $\varphi \wedge \varphi_0 \sim \varphi_0$; $\varphi \vee \varphi_1 \sim \varphi_1$; $\varphi \vee \varphi_0 \sim \varphi$; $(\varphi\psi \to \varphi) \sim \varphi_1$; $(\varphi \to \varphi \vee \psi) \sim \varphi_1$; $\varphi \oplus \varphi \sim \varphi_0$; $\varphi \oplus \varphi_1 \sim \overline{\varphi}$; $\varphi \oplus \varphi_0 \sim \varphi$.

§ 4.4. Дизъюнктивные и конъюнктивные нормальные формы

Если x — логическая переменная, $\delta \in \{0, 1\}$, то выражение

$$x^\delta = \begin{cases} x, & \text{если } \delta = 1, \\ \overline{x}, & \text{если } \delta = 0 \end{cases}$$

называется *литерой*. Литеры x и $\overline{x}$ называются *контрарными*.

Элементарной конъюнкцией или *конъюнктом* называется конъюнкция литер. *Элементарной дизъюнкцией* или *дизъюнктом* называется дизъюнкция литер.

Пример 4.4.1. Формулы $x \vee \overline{y} \vee \overline{z}$ и $x \vee y \vee x \vee \overline{x}$ — дизъюнкты, формулы $\overline{x}_1 x_2 x_3$ и $x_1 x_2 \overline{x}_1$ — конъюнкты, а $\overline{x}$ является одновременно и дизъюнктом, и конъюнктом. □

Дизъюнкция конъюнктов называется *дизъюнктивной нормальной формой* (ДНФ); конъюнкция дизъюнктов называется *конъюнктивной нормальной формой* (КНФ).

Пример 4.4.2. Формула $x\overline{y} \vee yz$ — ДНФ, формула $(x \vee z \vee \vee \overline{y})(x \vee \vee z)y$ — КНФ, а формула $x\overline{y}$ является одновременно КНФ и ДНФ.

Теорема 4.4.1. 1. *Любая формула эквивалентна некоторой ДНФ.*
2. *Любая формула эквивалентна некоторой КНФ.*

Опишем алгоритм приведения формулы к ДНФ.

1. Выражаем все логические операции, участвующие в построении формулы, через дизъюнкции, конъюнкции и отрицания, используя эквивалентности $(\varphi \to \psi) \sim (\neg\varphi \vee \psi)$, $(\varphi \leftrightarrow \psi) \sim \sim (\neg\varphi \vee \psi) \wedge (\neg\psi \vee \varphi)$ и определения операций $|$, $\downarrow$ и $\oplus$.

2. Используя законы де Моргана, переносим все отрицания к переменным и сокращаем двойные отрицания по правилу $\neg\neg x \sim x$.

3. Используя закон дистрибутивности $(\varphi \wedge (\psi \vee \chi)) \sim ((\varphi \wedge \psi) \vee \vee (\varphi \wedge \chi))$, преобразуем формулу так, чтобы все конъюнкции выполнялись раньше дизъюнкций.

В результате применения пп. 1–3 получается ДНФ данной формулы.

Пример 4.4.3. Приведем к ДНФ формулу

$$\varphi = ((x \to y) \downarrow \neg(y \to z))$$

Выразим логические операции $\to$ и $\downarrow$ через $\wedge$, $\vee$ и $\neg$:

$$\varphi \sim ((\overline{x} \vee y) \downarrow \neg(\overline{y} \vee z) \sim \neg((\overline{x} \vee y) \vee \neg(\overline{y} \vee z)).$$

В полученной формуле перенесем отрицание к переменным и сократим двойные отрицания:

$$\varphi \sim (\neg(\overline{x} \vee y) \wedge \neg\neg(\overline{y} \vee z)) \sim (\overline{\overline{x}} \wedge \overline{y}) \wedge (\overline{y} \vee z) \sim (x \wedge \overline{y}) \wedge (\overline{y} \vee z).$$

Используя закон дистрибутивности, приводим формулу к ДНФ:

$$\varphi \sim (x \wedge \overline{y} \wedge \overline{y}) \vee (x \wedge \overline{y} \wedge z). \ \square$$

Приведение формулы к КНФ производится аналогично приведению ее к ДНФ, только вместо п. 3 применяется пункт

3′. Используя закон дистрибутивности

$$(\varphi \vee (\psi \wedge \chi)) \sim ((\varphi \vee \psi) \wedge (\varphi \vee \chi)),$$

преобразуем формулу так, чтобы все дизъюнкции выполнялись раньше, чем конъюнкции.

Пример 4.4.4. Приведем к КНФ формулу

$$\varphi = (x \to y) \wedge ((\overline{y} \to z) \to \overline{x}).$$

Преобразуем формулу φ к формуле, не содержащей $\to$:

$$\varphi \sim (\overline{x} \vee y) \wedge (\neg(\overline{y} \to z) \vee \overline{x}) \sim (\overline{x} \vee y) \wedge (\neg(\overline{\overline{y}} \vee z) \vee \overline{x}).$$

В полученной формуле перенесем отрицание к переменным и сократим двойные отрицания:

$$\varphi \sim (\overline{x} \vee y) \wedge ((\overline{\overline{\overline{y}}} \wedge \overline{z}) \vee \overline{x}) \sim (\overline{x} \vee y) \wedge ((\overline{y} \wedge \overline{z}) \vee \overline{x}).$$

По закону дистрибутивности получаем, что формула φ эквивалентна формуле
$$(\overline{x}\vee y)\wedge(\overline{x}\vee\overline{y})\wedge(\overline{x}\vee\overline{z}),$$
являющейся КНФ. Упростим полученную формулу:
$$(\overline{x}\vee y)\wedge(\overline{x}\vee\overline{y})\wedge(\overline{x}\vee\overline{z})\overset{(1)}{\sim}$$
$$\sim(\overline{x}\vee(y\wedge\overline{y}))\wedge(\overline{x}\vee\overline{z})\overset{(2)}{\sim}\overline{x}\wedge(\overline{x}\vee\overline{z})\overset{(3)}{\sim}\overline{x}$$
(для преобразования (1) использовался закон дистрибутивности, для (2) — эквивалентность 4 предложения 4.3.2., для (3) — закон поглощения). Таким образом, формула φ из примера 4.1.1 эквивалентными преобразованиями приводится к формуле $\overline{x}$ (являющейся одновременно ДНФ и КНФ формулы φ). □

Любая булева функция может иметь бесконечно много представлений в виде ДНФ и КНФ. Особое место среди этих представлений занимают совершенные ДНФ (СДНФ) и совершенные КНФ (СКНФ).

Пусть $(x_1,\ldots,x_n)$ — набор логических переменных, $\Delta = (\delta_1,\ldots,\delta_n)$ — набор нулей и единиц. *Конституентой единицы* набора Δ называется конъюнкт
$$K^1(\delta_1,\ldots,\delta_n)=x_1^{\delta_1}x_2^{\delta_2}\ldots x_n^{\delta_n}.$$
Конституентой нуля набора Δ называется дизъюнкт
$$K^0(\delta_1,\ldots,\delta_n)=x_1^{1-\delta_1}\vee x_2^{1-\delta_2}\vee\ldots\vee x_n^{1-\delta_n}.$$

Отметим, что $K_1(\delta_1,\delta_2,\ldots,\delta_n)=1$ $(K^0(\delta_1,\delta_2,\ldots,\delta_n)=0)$ тогда и только тогда, когда $x_1=\delta_1$, $x_2=\delta_2$, …, $x_n=\delta_n$.

Совершенной ДНФ называется дизъюнкция некоторых конституент единицы, среди которых нет одинаковых, а *совершенной КНФ* называется конъюнкция некоторых конституент нуля, среди которых нет одинаковых. Таким образом, СДНФ (СКНФ) есть ДНФ (КНФ), в которой в каждый конъюнкт (дизъюнкт) каждая переменная x_i из набора $\{x_1,\ldots,x_n\}$ входит ровно один раз, причем входит либо сама x_i, либо ее отрицание $\overline{x}_i$.

Пример 4.4.5. Формула $x_1\overline{x}_2x_3$ есть конституента единицы $K^1(1,0,1)$, формула $x\vee y\vee\overline{z}$ есть конституента нуля $K^0(0,0,1)$, формула $x_1\overline{x}_2x_3\vee\overline{x}_1x_2x_3$ — СДНФ, формула $(x\vee y\vee\overline{z})\wedge(\overline{x}\vee\overline{y}\vee\vee z)\wedge(\overline{x}\vee y\vee z)$ — СКНФ, а формула $x_1\overline{x}_2x_3\vee\overline{x}_1x_2x_3\vee x_1\overline{x}_2x_3$ не является СДНФ. □

Для решения задачи нахождения СДНФ и СКНФ, эквивалентных исходной формуле φ, предварительно рассмотрим разложения булевой функции $f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ по k переменным (для определенности по x_1, x_2, …, x_k) — *разложения Шеннона.*

Теорема 4.4.2 (первая теорема Шеннона). *Любая булева функция $f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ представима в виде разложения Шеннона:*

$$f(x_1, x_2, \ldots, x_k, x_{k+1}, \ldots, x_n) =$$

$$= \bigvee_{\substack{\text{по всем}\\ \text{наборам}\\ (\delta_1,\ldots,\delta_k)}} (\bigwedge_{i=1}^{k} x_i^{\delta_i}) f(\delta_1, \delta_2, \ldots, \delta_k, x_{k+1}, \ldots, x_n).$$

В силу принципа двойственности для булевых алгебр справедлива

Теорема 4.4.3 (вторая теорема Шеннона). *Любая булева функция $f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ представима в виде разложения Шеннона:*

$$f(x_1, x_2, \ldots, x_k, x_{k+1}, \ldots, x_n) =$$

$$= \bigwedge_{\substack{\text{по всем}\\ \text{наборам}\\ (\delta_1,\ldots,\delta_k)}} (\bigvee_{i=1}^{k} x_i^{1-\delta_i} \vee f(\delta_1, \delta_2, \ldots, \delta_k, x_{k+1}, \ldots, x_n)).$$

В предельном случае, когда $k = n$, получаем представление булевой функции $f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$, не равной нулю, в виде совершенной ДНФ:

$$f(x_1, x_2, \ldots, x_n) = \bigvee_{\substack{\text{по всем наборам}\\ (\delta_1,\delta_2,\ldots,\delta_n),\\ \text{на которых}\\ f(\delta_1,\ldots,\delta_n)=1}} (\bigwedge_{i=1}^{n} x_i^{\delta_i}).$$

Аналогично получаем представление булевой функции $f(x_1, x_2, \ldots$ $\ldots, x_n)$, не равной единице, в виде совершенной КНФ:

$$f(x_1, x_2, \ldots, x_n) = \bigwedge_{\substack{\text{по всем наборам}\\ (\delta_1,\delta_2,\ldots,\delta_n),\\ \text{на которых}\\ f(\delta_1,\ldots,\delta_n)=0}} (\bigvee_{i=1}^{n} x_i^{1-\delta_i}).$$

Приведенные формулы позволяют сформулировать следующую теорему.

Теорема 4.4.4 (о функциональной полноте). *Для любой булевой функции f найдется формула φ, представляющая функцию f. Если $f \not\equiv 0$, то существует представляющая ее формула φ, находящаяся в СДНФ:*

$$\varphi = \bigvee_{f(\delta_1,\ldots,\delta_n)=1} K^1(\delta_1,\ldots,\delta_n),$$

и такое представление единственно с точностью до порядка следования конституент единицы. Если $f \not\equiv 1$, то существует представляющая ее формула φ, находящаяся в СКНФ:

$$\varphi = \bigwedge_{f(\delta_1,\ldots,\delta_n)=0} K^0(\delta_1,\ldots,\delta_n),$$

и такое представление единственно с точностью до порядка следования конституент нуля.

Пример 4.4.6. Найти СДНФ и СКНФ функции $f(x,y,z)$, заданной следующей таблицей истинности:

x	0	0	0	0	1	1	1	1
y	0	0	1	1	0	0	1	1
z	0	1	0	1	0	1	0	1
$f(x,y,z)$	1	0	0	1	0	1	0	1

По теореме о функциональной полноте СДНФ имеет вид $\varphi_1 = \overline{x}\,\overline{y}\,\overline{z} \vee \overline{x}yz \vee x\overline{y}z \vee xyz$, а СКНФ — $\varphi_2 = (x \vee y \vee \overline{z})(x \vee \overline{y} \vee \vee z)(\overline{x} \vee y \vee z)(\overline{x} \vee \overline{y} \vee z)$. $\square$

Итак, для нахождения СДНФ и СКНФ исходной формулы φ составляется ее таблица истинности, а затем по ней строится требуемая совершенная нормальная форма.

В примере 4.4.6, имея, скажем, СДНФ φ_1 для функции f, можно составить ее таблицу истинности и по ней найти СКНФ φ_2.

Описанный способ нахождения СДНФ и СКНФ по таблице истинности бывает часто более трудоемким, чем следующий алгоритм.

Для нахождения СДНФ данную формулу приводим сначала к ДНФ, а затем преобразовываем ее конъюнкты в конституенты единицы с помощью следующих действий:

а) если в конъюнкт входит некоторая переменная вместе со своим отрицанием, то мы удаляем этот конъюнкт из ДНФ;

б) если в конъюнкт одна и та же литера x^δ входит несколько раз, то удаляем все литеры x^δ, кроме одной;

в) если в некоторый конъюнкт $x_1^{\delta_1}\ldots x_k^{\delta_k}$ не входит переменная y, то этот конъюнкт заменяем на эквивалентную формулу $x_1^{\delta_1}\ldots x_k^{\delta_k} \wedge (y \vee \overline{y})$

и, применяя закон дистрибутивности, приводим полученную формулу к ДНФ; если недостающих переменных несколько, то для каждой из них к конъюнкту добавляем соответствующую формулу вида $(y \vee \overline{y})$;

г) если в полученной ДНФ имеется несколько одинаковых конституент единицы, то оставляем только одну из них. В результате получается СДНФ.

П р и м е р 4.4.7. Найдем СДНФ для ДНФ $\varphi = x\overline{x} \vee x \vee yzy$. Имеем $\varphi \sim x \vee yz \sim (x(y \vee \overline{y}) \vee yz(x \vee \overline{x})) \sim (xy \vee x\overline{y} \vee xyz \vee \overline{x}yz) \sim (xy(z \vee \overline{z}) \vee$ $\vee x\overline{y}(z \vee \overline{z}) \vee xyz \vee \overline{x}yz) \sim (xyz \vee xy\overline{z} \vee x\overline{y}z \vee x\overline{y}\,\overline{z} \vee xyz \vee \overline{x}yz) \sim$ $\sim (xyz \vee xy\overline{z} \vee x\overline{y}z \vee x\overline{y}\,\overline{z} \vee \overline{x}yz)$. □

Описание алгоритма приведения КНФ к СКНФ аналогично вышеизложенному описанию алгоритма приведения ДНФ к СДНФ и оставляется читателю в качестве упражнения.

§ 4.5. Двухэлементная булева алгебра. Фактор-алгебра алгебры формул

Рассмотрим множество $B_0 = \{0, 1\}$ и определим на нем операции $\wedge$, $\vee$, $^-$ согласно таблицам истинности формул $x \wedge y$, $x \vee y$, $\overline{x}$. Тогда система $\mathfrak{B}_0 = \langle B_0; \wedge, \vee, ^-, 0, 1\rangle$ является двухэлементной булевой алгеброй (см. пример 2.5.2, п. 1). Формулы алгебры логики, содержащие лишь логические операции $\wedge$, $\vee$, $^-$, являются термами в $\mathfrak{B}_0$. По теореме о функциональной полноте в булевой алгебре $\mathfrak{B}_0$ с помощью терма можно задать любую булеву функцию.

Обозначим через Φ_n множество всех формул алгебры логики с переменными из множества $\{x_1, x_2, \ldots, x_n\}$. На множестве Φ_n определены двухместные операции конъюнкции и дизъюнкции — $\wedge$: $(\varphi, \psi) \mapsto \varphi \wedge \psi$, $\vee$: $(\varphi, \psi) \mapsto \varphi \vee \psi$ — и одноместная операция отрицания $^-$: $\varphi \mapsto \overline{\varphi}$. Выделим на множестве Φ_n две константы $x \wedge \overline{x}$ и $x \vee \overline{x}$. Тем самым получается алгебра формул $\mathcal{F}_n = \langle \Phi_n; \wedge, \vee, ^-, x \wedge \overline{x}, x \vee \overline{x}\rangle$. Нетрудно заметить, что отношение $\sim$ эквивалентности формул является конгруэнцией на алгебре $\mathcal{F}_n$, и поэтому можно задать фактор-алгебру $\mathcal{F}_n/\!\sim$. На фактор-множестве $\Phi_n/\!\sim$ операции $\wedge$, $\vee$ и $^-$ определяются следующим образом: $\sim(\varphi) \wedge \sim(\psi) = \sim(\varphi \wedge \psi)$, $\sim(\varphi) \vee \sim(\psi) = \sim(\varphi \vee \psi)$, $\neg \sim(\varphi) = \sim(\neg\varphi)$. На множестве $\Phi_n/\!\sim$ выделяются две константы: $0 = \sim(x \wedge \overline{x})$ и $1 = \sim(x \vee \overline{x})$. Полученная система $\langle \Phi_n/\!\sim; \wedge, \vee, ^-, 0, 1\rangle$ является фактор-алгеброй $\mathcal{F}_n/\!\sim$.

Теорема 4.5.1. *Фактор-алгебра $\mathcal{F}_n/\!\sim$ изоморфна алгебре булевых функций $\mathfrak{B}_n$.* □

По теореме о функциональной полноте каждой функции $f \in B_n$, не являющейся константой 0, соответствует некоторая СДНФ ψ, принадлежащая классу $\sim(\varphi) = \xi^{-1}(f)$ формул, представляющих функцию f. Возникает задача нахождения в классе $\sim(\varphi)$ дизъюнктивной нормальной формы, имеющей наиболее простое строение.

§ 4.6. Минимизация булевых функций в классе ДНФ

Каждая формула имеет конечное число вхождений переменных. Под *вхождением переменной* понимается место, которое переменная занимает в формуле. Задача заключается в том, чтобы для данной булевой функции f найти ДНФ, представляющую эту функцию и имеющую наименьшее число вхождений переменных.

Элементарным произведением называется конъюнкт, в который любая переменная входит не более одного раза.

Пример 4.6.1. Формула $x_2\overline{x}_3x_4$ — элементарное произведение, а формула $x_1x_2x_1\overline{x}_3$ элементарным произведением не является. □

Формула $\varphi(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ называется *импликантой* формулы $\psi(x_1, x_2, \ldots, x_n)$, если φ — элементарное произведение и $\varphi \wedge \psi \sim \varphi$, т. е. для соответствующих формулам φ и ψ функций f_φ и f_ψ справедливо неравенство $f_\varphi \leqslant f_\psi$. Формула $\varphi(x_1, \ldots, x_n)$ называется *импликантой* функции f, если φ — импликанта совершенной ДНФ, представляющей функцию f. Импликанта $\varphi(x_1, \ldots, x_n) = x_{i_1}^{\delta_1} x_{i_2}^{\delta_2} \cdots x_{i_k}^{\delta_k}$ формулы ψ называется *простой*, если после отбрасывания любой литеры из φ не получается формула, являющаяся импликантой формулы ψ.

Пример 4.6.2. Найдем все импликанты и простые импликанты для формулы $\varphi(x, y) = x \to y$. Всего имеется 8 элементарных произведений с переменными x и y. Ниже приведены их таблицы истинности:

x	y	$\varphi = x \to y$	$\overline{x}\,\overline{y}$	$\overline{x}y$	$x\overline{y}$	xy	$\overline{x}$	$\overline{y}$	x	y
0	0	1	1	0	0	0	1	1	0	0
0	1	1	0	1	0	0	1	0	0	1
1	0	0	0	0	1	0	0	1	1	0
1	1	1	0	0	0	1	0	0	1	1

Из таблиц истинности заключаем, что формулы $\overline{x}\,\overline{y}$, $\overline{x}y$, xy, $\overline{x}$, y — все импликанты формулы φ, а из этих импликант простыми являются формулы $\overline{x}$ и y (формула $\overline{x}\,\overline{y}$, например, не является простой импликантой, поскольку отбрасывая литеру $\overline{y}$, получаем импликанту $\overline{x}$). □

Дизъюнкция всех простых импликант данной формулы (функции) называется *сокращенной ДНФ*.

Теорема 4.6.1. *Любая булева функция, не являющаяся константой* 0, *представима в виде сокращенной ДНФ.*

В примере 4.6.2 функция, соответствующая формуле $x \to y$, представима формулой $\overline{x} \vee y$, которая является ее сокращенной ДНФ.

Сокращенная ДНФ может содержать *лишние* импликанты, удаление которых не меняет таблицы истинности. Если из сокращенной ДНФ удалить все лишние импликанты, то получается ДНФ, называемая *тупиковой*.

Выбор из всех тупиковых форм формы с наименьшим числом вхождений переменных дает *минимальную ДНФ* (*МДНФ*).

Рассмотрим *метод Квайна* для нахождения МДНФ, представляющей данную булеву функцию. Определим следующие три операции:

— *операция полного склеивания* — $\varphi \cdot x \vee \varphi \cdot \overline{x} \sim \varphi(x \vee \overline{x}) \sim \varphi$;

— *операция неполного склеивания*

$$\varphi \cdot x \vee \varphi \cdot \overline{x} \sim \varphi(x \vee \overline{x}) \vee \varphi \cdot x \vee \varphi \cdot \overline{x} \sim \varphi \vee \varphi x \vee \varphi \overline{x};$$

— *операция элементарного поглощения* — $\varphi \cdot x^{\delta} \vee \varphi \sim \varphi$, $\delta \in \{0, 1\}$.

Теорема 4.6.2 (теорема Квайна). *Если исходя из совершенной ДНФ функции произвести все возможные операции неполного склеивания, а затем элементарного поглощения, то в результате получится сокращенная ДНФ, т. е. дизъюнкция всех простых импликант.*

П р и м е р 4.6.3. Пусть функция $f(x, y, z)$ задана совершенной ДНФ $\varphi = \overline{x}y\overline{z} \vee \overline{x}yz \vee x\overline{y}z \vee xy\overline{z} \vee xyz$. Тогда, производя в два этапа все возможные операции неполного склеивания, а затем элементарного поглощения, имеем

$$\varphi \sim \overline{x}y(\overline{z} \vee z) \vee y\overline{z}(x \vee \overline{x}) \vee yz(x \vee \overline{x}) \vee xz(y \vee \overline{y}) \vee$$

$$\vee xy(z \vee \overline{z}) \vee \overline{x}y\overline{z} \vee \overline{x}yz \vee x\overline{y}z \vee xy\overline{z} \vee xyz \sim$$

$$\sim \overline{x}y \vee y\overline{z} \vee yz \vee xz \vee xy \vee$$

$$\vee \overline{x}y\overline{z} \vee \overline{x}yz \vee x\overline{y}z \vee xy\overline{z} \vee xyz \sim$$

$$\sim y(\overline{x} \vee x) \vee y(z \vee \overline{z}) \vee \overline{x}y \vee y\overline{z} \vee yz \vee xz \vee xy \vee$$

$$\vee \overline{x}y\overline{z} \vee \overline{x}yz \vee x\overline{y}z \vee xy\overline{z} \vee xyz \sim$$

$$\sim y \vee \overline{x}y \vee y\overline{z} \vee yz \vee xz \vee xy \vee$$

$$\vee \overline{x}y\overline{z} \vee \overline{x}yz \vee x\overline{y}z \vee xy\overline{z} \vee xyz \sim y \vee xz.$$

Таким образом, сокращенной ДНФ функции f является формула $y \vee$ $\vee xz$. $\square$

На практике при выполнении операций неполного склеивания на каждом этапе можно не писать члены, участвующие в этих операциях, а писать только результаты всевозможных полных склеиваний и конъюнкты, не участвующие ни в каком склеивании.

П р и м е р 4.6.4. Пусть функция $f(x,y,z)$ задана совершенной ДНФ $\varphi = \overline{x}\,\overline{y}\,\overline{z} \vee \overline{x}\,\overline{y}z \vee x\overline{y}z \vee xyz$. Тогда, производя операции склеивания, а затем элементарного поглощения, имеем $\varphi \sim \overline{x}\,\overline{y}(z \vee \overline{z}) \vee \overline{y}z(\overline{x} \vee x) \vee xz(\overline{y} \vee y) \sim \overline{x}\,\overline{y} \vee \overline{y}z \vee xz$. □

Для получения минимальной ДНФ из сокращенной ДНФ используется *матрица Квайна*, которая строится следующим образом. В заголовках столбцов таблицы записываются конституенты единицы совершенной ДНФ, а в заголовках строк — простые импликанты из полученной сокращенной ДНФ. В таблице звездочками отмечаются те пересечения строк и столбцов, для которых конъюнкт, стоящий в заголовке строки, входит в конституенту единицы, являющейся заголовком столбца.

Для примера 4.6.4 матрица Квайна имеет вид

Импликанты	Конституенты единицы			
	$\overline{x}\,\overline{y}\,\overline{z}$	$\overline{x}\,\overline{y}z$	$x\overline{y}z$	xyz
$\overline{x}\,\overline{y}$	*	*		
$\overline{y}z$		*	*	
xz			*	*

В тупиковую ДНФ выбирается минимальное число простых импликант, дизъюнкция которых сохраняет все конституенты единицы, т. е. каждый столбец матрицы Квайна содержит звездочку, стоящую на пересечении со строкой, соответствующей одной из выбранных импликант. В качестве минимальной ДНФ выбирается тупиковая, имеющая наименьшее число вхождений переменных.

В примере 4.6.4 по матрице Квайна находим, что минимальная ДНФ заданной функции есть $\overline{x}\,\overline{y} \vee xz$.

В силу принципа двойственности для булевых алгебр все приведенные понятия и рассуждения очевидным образом можно преобразовать для нахождения минимальных конъюнктивных нормальных форм (МКНФ).

§ 4.7. Карты Карно

Для формул с малым числом переменных имеется другой способ получения простых импликант (и, значит, нахождения с помощью матрицы Квайна минимальной ДНФ). Этот способ основан на использовании так называемых *карт Карно*.

	$00\ldots0$	$00\ldots1$	$\ldots x_1 \ldots x_k \ldots$	$10\ldots0$
$00\ldots0$			$\ldots$	
$00\ldots1$			$\ldots$	
$\ldots$ $x_{k+1}\ldots x_k$ $\ldots$	$\ldots$	$\ldots$	$\ldots$	$\ldots$
$10\ldots0$			$\ldots$	

Рис. 4.5

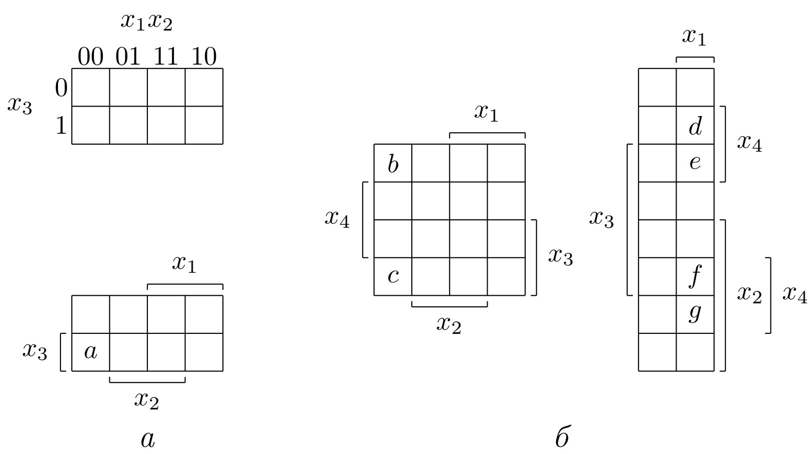


Рис. 4.6

Карта Карно для n переменных служит эффективным средством иллюстративного представления n-куба. Она содержит 2^n ячеек, каждая из которых соответствует одной из 2^n возможных комбинаций значений n логических переменных x_1, x_2, …, x_n. Карта строится в виде матрицы размера 2^{n-k} на 2^k так, что ее столбцы соответствуют значениям переменных x_1, …, x_k, строки — значениям переменных x_{k+1}, …, x_n, а соседние ячейки (как по вертикали, так и по горизонтали) отличаются только значением одной переменной (рис. 4.5).

На рис. 4.6 приведены карты Карно для функций трех и четырех переменных соответственно. В этих картах все ячейки, отмеченные скобкой x_i (по строке и столбцу), представляют входные комбинации с $x_i = 1$, а в неотмеченных строках и столбцах ячейки соответствуют комбинациям с $x_i = 0$ (см. рис. 4.6*а*, на котором разными способами изображена одна и та же карта). Например, на рис. 4.6*а* ячейка *a* соответствует набору 001 значений переменных x_1, x_2, x_3. Отметим, что для каждой функции может быть построено несколько различных карт. На рис. 4.6*б* изображены две карты Карно для функции четырех переменных. Первая карта соответствует разбиению переменных $\{\{x_1, x_2\}, \{x_3, x_4\}\}$, а вторая — $\{\{x_1\}, \{x_2, x_3, x_4\}\}$.

У каждой вершины n-куба есть ровно n смежных с ней вершин, т. е. вершин, отличающихся от нее только одной координатой. Поскольку в карте Карно каждая ячейка может иметь не более четырех ячеек, соседних по строке или столбцу, для представления точек, отличающихся только на одну координату, необходимо использовать и более удаленные ячейки. Например, точки b и c на рис. 4.6*б* отличаются только значением переменной x_3, т. е. являются смежными.

Булева функция может быть представлена на карте Карно выделением 1-ячеек (т. е. ячеек, в которых функция принимает значение, равное 1). Подразумевается, что необозначенные ячейки соответствуют 0-точкам.

На рис. 4.7 изображена карта, представляющая булеву функцию $f(x, y, z)$, для которой $f(0,0,0) = f(1,1,0) = f(1,1,1) =$ $= f(1,0,1) = 0, f(0,1,0) = f(1,0,0) = = f(0,0,1) =$ $f(0,1,1) = 1$.

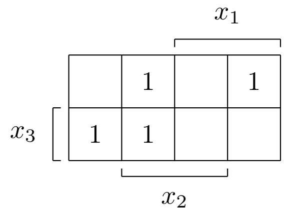


Рис. 4.7

Для построения импликант берутся всевозможные наборы 1-ячеек, образующих вершины некоторого k-куба (т. е. 2^k точек таких, что пары соседних отличаются ровно одной координатой). Совпадающие координаты образуют набор $(\delta_1, \ldots, \delta_{n-k})$, и требуемая импликанта имеет вид $x_{i_1}^{\delta_1} \ldots x_{i_{n-k}}^{\delta_{n-k}}$, где x_j — переменная, соответствующая значению δ_j.

П р и м е р 4.7.1. Точки b и c на рис. 4.6*б* лежат в 1-кубе, который определяет конъюнкт $\overline{x}_1\overline{x}_2\overline{x}_4$. Точки $\{d, e, f, g\}$ образуют 2-куб, представляющий импликанту x_1x_4. $\square$

Определение простых импликант функции сводится к нахождению всех k-кубов, которые не содержатся в кубах более высокого порядка.

П р и м е р 4.7.2. Простые импликанты для карты Карно, приведенной на рис. 4.7, равны $\overline{x}_1x_2$, $x_1\overline{x}_2\overline{x}_3$, $\overline{x}_1x_3$.

П р и м е р 4.7.3. На рис. 4.8 показана карта Карно, простые импликанты которой имеют вид $x_2\overline{x}_3\overline{x}_4$, $x_1x_2\overline{x}_3$, $x_1\overline{x}_3x_4$, $x_1\overline{x}_2x_4$, $\overline{x}_2x_3x_4$, $\overline{x}_1x_2\overline{x}_4$, $\overline{x}_1x_3$. Заметим, что импликанты $\overline{x}_1\overline{x}_2x_3$, $\overline{x}_1x_2x_3$, $\overline{x}_1x_3x_4$ и $\overline{x}_1x_3\overline{x}_4$ не являются простыми, так как образуемые ими 1-кубы содержатся в 2-кубе $\overline{x}_1x_3$. $\square$

После нахождения простых импликант задача построения минимальной ДНФ сводится к изучению матрицы Квайна, как показано в § 4.6. При наглядном размещении простых импликант в карте Карно удается непосредственно находить минимальную ДНФ, выбирая те простые импликанты, которые покрывают все единицы и имеют наименьшее возможное число вхождений переменных. Так, минималь-

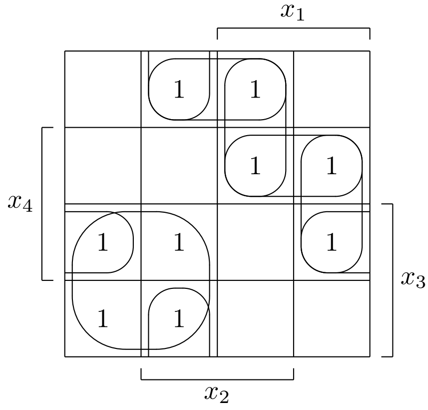


Рис. 4.8

ной ДНФ для функции, изображенной на рис. 4.8, является формула $x_2\overline{x}_3\overline{x}_4 \vee x_1\overline{x}_3x_4 \vee x_1\overline{x}_2x_4 \vee \overline{x}_1x_3$.

Карты Карно применимы и для не всюду определенных функций. В этом случае выделяются максимальные k-кубы, покрывающие ненулевые ячейки и содержащие хотя бы одну единицу.

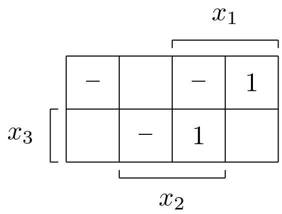


Рис. 4.9

П р и м е р 4.7.4. На рис. 4.9 представлена карта Карно для частичной функции f, зависящей от трех переменных x_1, x_2, x_3. Сокращенная ДНФ имеет вид $\overline{x}_2\overline{x}_3 \vee x_1\overline{x}_3 \vee x_1x_2 \vee x_2x_3$, а МДНФ — $\overline{x}_2\overline{x}_3 \vee x_1\overline{x}_3 \vee x_2x_3$ или $\overline{x}_2\overline{x}_3 \vee x_1x_2 \vee x_2x_3$.

§ 4.8. Принцип двойственности для булевых функций

В § 2.5 мы говорили о двойственности в классе булевых алгебр, которая проявляется в том, что на множестве B со структурой булевой алгебры $\mathfrak{B}$ можно ввести структуру двойственной алгебры $\mathfrak{B}^+$, в которой роль операции $\wedge$ играет $\vee$, роль операции $\vee$ — $\wedge$, а в качестве нуля (единицы) используется 1 (соответственно 0). При этом между алгебрами $\mathfrak{B}$ и $\mathfrak{B}^+$ имеется изоморфизм $\varphi : x \mapsto \overline{x}$. В этом параграфе мы рассмотрим соответствие булевых функций при изоморфизме φ.

Функция $f^+(x_1, \ldots, x_n)$ называется *двойственной* по отношению к функции $f(x_1, \ldots, x_n)$, если $f^+(x_1, \ldots, x_n) = \overline{f(\overline{x}_1, \ldots, \overline{x}_n)}$.

Двойственная функция получается из исходной при замене значений всех переменных, а также значений функции на противоположные, т. е. в таблице истинности нужно заменить 0 на 1, а 1 на 0.

П р и м е р 4.8.1. Двойственной к функции $x \wedge y$ является функция, соответствующая формуле $\neg(\overline{x} \wedge \overline{y})$, т. е. $\neg\neg(x \vee y)$ или $x \vee y$: $(x \wedge y)^+ = x \vee y$. Аналогично $(x \vee y)^+ = x \wedge y$, $(\overline{x})^+ = \overline{x}$. $\square$

Принцип двойственности. Если

$$f(x_1, \ldots, x_n) = g(h_1(x_1, \ldots, x_n), \ldots, h_m(x_1, \ldots, x_n)),$$

то

$$f^+(x_1, \ldots, x_n) = g^+(h_1^+(x_1, \ldots, x_n), \ldots, h_m^+(x_1, \ldots, x_n)).$$

Таким образом, функция, двойственная суперпозиции функций, есть соответствующая суперпозиция двойственных функций.

Принцип двойственности удобен при нахождении двойственных функций, представленных формулами, содержащими лишь конъюнкции, дизъюнкции и отрицания. В этом случае в исходной формуле конъюнкции заменяются на дизъюнкции, а дизъюнкции — на конъюнкции. Таким образом, ДНФ соответствует КНФ, КНФ — ДНФ, СДНФ — СКНФ, СКНФ — СДНФ.

П р и м е р 4.8.2. $(xy \vee \overline{xz} \vee \overline{x}y\overline{z})^+ = (x \vee y) \wedge (\overline{x} \vee \overline{z}) \wedge (\overline{x} \vee y \vee \overline{z})$.

Отметим, что если формула φ эквивалентна формуле ψ: $\varphi \sim \psi$, то $\varphi^+ \sim \psi^+$.

Функция $f(x_1, \ldots, x_n)$ называется *самодвойственной*, если

$$f^+(x_1, \ldots, x_n) = f(x_1, \ldots, x_n).$$

П р и м е р 4.8.3. Покажем, что формула $\varphi = xy \vee xz \vee yz$ задает самодвойственную функцию.

С этой целью убедимся, что на всех противоположных наборах значений переменных $(\delta_1, \delta_2, \delta_3)$ и $(1-\delta_1, 1-\delta_2, 1-\delta_3)$ формула принимает противоположные значения. Действительно, составив таблицу истинности

x	0	0	0	0	1	1	1	1
y	0	0	1	1	0	0	1	1
z	0	1	0	1	0	1	0	1
φ	0	0	0	1	0	1	1	1

,

получаем $\varphi(0,0,0) = \overline{\varphi(1,1,1)}$, $\varphi(0,0,1) = \overline{\varphi(1,1,0)}$, $\varphi(0,1,0) = \overline{\varphi(1,0,1)}$, $\varphi(0,1,1) = \overline{\varphi(1,0,0)}$.

§ 4.9. Полные системы булевых функций

Как мы уже знаем из теоремы о функциональной полноте, любая булева функция представима в виде формулы, содержащей лишь операции $\wedge$, $\vee$, $\neg$, т. е. в виде терма сигнатуры $\{\wedge, \vee, \neg\}$. В этом параграфе будет дано описание сигнатур, позволяющих получать любые булевы функции.

Система булевых функций $\mathcal{F} = \{f_1, f_2, \ldots, f_n\}$ называется *полной*, если любая булева функция представима в виде терма сигнатуры $\{f_1, f_2, \ldots, f_n\}$, т. е. в виде суперпозиций функций из $\mathcal{F}$.

Из сказанного выше ясно, что система $\{\wedge, \vee, \neg\}$ является полной. Ответ на вопрос о полноте произвольной системы $\mathcal{F}$ дает теорема Поста, формулируемая ниже.

Введем определение *классов Поста.*

1. Класс P_0 — это класс булевых функций, *сохраняющих нуль*, т. е. функций $f(x_1, \ldots, x_n)$, для которых $f(0, 0, \ldots, 0) = 0$:

$$P_0 = \{f \mid f(0, 0, \ldots, 0) = 0\}.$$

2. Класс P_1 — это класс булевых функций, *сохраняющих единицу*, т. е. функций $f(x_1, \ldots, x_n)$, для которых $f(1, 1, \ldots, 1) = 1$:

$$P_1 = \{f \mid f(1, 1, \ldots, 1) = 1\}.$$

3. Класс S — это класс самодвойственных функций:

$$S = \{f \mid f \text{ — самодвойственная функция}\}.$$

4. Класс M — это класс монотонных функций. Булева функция $f(x_1, \ldots, x_n)$ называется *монотонной*, если для любых наборов нулей и единиц $(\alpha_1, \ldots, \alpha_n)$ и $(\beta_1, \ldots, \beta_n)$ из условий $\alpha_1 \leqslant \beta_1$, …, $\alpha_n \leqslant \beta_n$ следует $f(\alpha_1, \ldots, \alpha_n) \leqslant f(\beta_1, \ldots, \beta_n)$. Таким образом,

$$M = \{f \mid f \text{ — монотонная функция}\}.$$

5. Класс $\mathcal{L}$ — это класс линейных функций. Булева функция $f(x_1, \ldots, x_n)$ называется *линейной*, если в булевом кольце $\langle\{0, 1\}; \oplus, \odot\rangle$ функция f представима в виде $f(x_1, \ldots, x_n) = c_0 \oplus c_1x_1 \oplus c_2x_2 \oplus \ldots \oplus c_nx_n$, где c_0, c_1, c_2, …, $c_n \in \{0, 1\}$.

Таким образом,

$$\mathcal{L} = \{f \mid f \text{ — линейная функция}\}.$$

Коэффициенты c_0, c_1, …, c_n линейной функции определяются из следующих соотношений:

$$c_0 = f(0, 0, \ldots, 0), c_0 \oplus c_1 = f(1, 0, \ldots, 0),$$

$$c_0 \oplus c_2 = f(0, 1, \ldots, 0), \ldots, c_0 \oplus c_n = f(0, 0, \ldots, 0, 1),$$

т. е.

$$c_0 = f(0, 0, \ldots, 0),$$
$$c_1 = c_0 \oplus f(1, 0, \ldots, 0), \ldots, c_n = c_0 \oplus f(0, 0, \ldots, 1). \tag{4.1}$$

Таким образом, проверка линейности сводится к нахождению коэффициентов c_i по формулам (4.1) и сопоставлению таблиц истинности данной формулы $f(x_1, \ldots, x_n)$ и полученной формулы $c_0 \oplus c_1 x_1 \oplus \ldots \oplus c_n x_n$.

П р и м е р 4.9.1. Проверим, является ли линейной функция $x \vee y$. Имеем $c_0 = 0 \vee 0 = 0$, $c_1 = 0 \oplus (1 \vee 0) = 1$, $c_2 = 0 \oplus (0 \vee 1) = 1$. Таким образом, $c_0 \oplus c_1 x \oplus c_2 y = x \oplus y$. Сопоставляя таблицы истинности формул $x \vee y$ и $x \oplus y$, убеждаемся, что они не совпадают. Вывод: функция $x \vee y$ нелинейна. □

Линейность функции можно также определить с помощью следующей теоремы.

Теорема 4.9.1 (теорема Жегалкина). *Всякая булева функция* $f(x_1, \ldots, x_n)$ *представима* полиномом Жегалкина, *т.е. в виде* $f(x_1, \ldots, x_n) = \bigoplus\limits_{(i_1, \ldots, i_k)} x_{i_1} x_{i_2} \ldots x_{i_k} \oplus c$, *где в каждом наборе* $(i_1, \ldots, i_k)$ *все* i_j *различны, а суммирование ведется по некоторому множеству таких несовпадающих наборов. Представление булевой функции в виде полинома Жегалкина единственно с точностью до порядка слагаемых.*

Полином Жегалкина называется *нелинейным* (*линейным*), если он (не) содержит произведения переменных.

Таким образом, линейность булевой функции равносильна линейности соответствующего полинома Жегалкина.

Для получения полинома Жегалкина булевой функции, находящейся в СДНФ, используются аксиомы булевой алгебры, аксиомы булева кольца $\langle \{0, 1\}; \oplus, \odot \rangle$ и равенства, выражающие операции $\wedge$, $\vee$ и $\neg$ через операции этого булева кольца: $x \vee y = = x \oplus y \oplus xy$, $x(y \oplus z) = xy \oplus xz$, $\overline{x} = x \oplus 1$, $x \oplus 0 = x$, $x \oplus \overline{x} = 1$, $x\overline{x} = 0$ и т.д.

П р и м е р 4.9.2. Определим, будет ли линейной функция $f(x, y, z) = \overline{x}\,\overline{y}z \vee \overline{x}yz \vee x\overline{y}\,\overline{z}$.

Имеем $f(x, y, z) = (\overline{x}\,\overline{y}z \oplus \overline{x}yz \oplus \overline{x}\,\overline{y}z\overline{x}yz) \vee x\overline{y}\,\overline{z} = (\overline{x}\,\overline{y}z \oplus \overline{x}yz) \vee \vee\, x\overline{y}\,\overline{z} = \overline{x}\,\overline{y}z \oplus \overline{x}yz \oplus x\overline{y}\,\overline{z} \oplus (\overline{x}\,\overline{y}z \oplus \overline{x}yz)x\overline{y}\,\overline{z} = \overline{x}\,\overline{y}z \oplus \overline{x}yz \oplus x\overline{y}\,\overline{z} \oplus 0 = = \overline{x}z(\overline{y} \oplus y) \oplus x\overline{y}\,\overline{z} = \overline{x}z \cdot 1 \oplus x\overline{y}\,\overline{z} = (x \oplus 1)z \oplus x(y \oplus 1)(z \oplus 1) = = xz \oplus 1 \cdot z \oplus xyz \oplus xz \oplus xy \oplus x = x \oplus z \oplus xy \oplus xyz$. Полученный полином Жегалкина является нелинейным, и, следовательно, функция f также нелинейна. □

Заметим, что если в эквивалентности $\varphi \vee \psi \sim \varphi \oplus \psi \oplus \varphi \cdot \psi$ формулы φ и ψ являются различными конституентами единицы, то их произведение $\varphi \cdot \psi$ равно 0, и тогда $\varphi \vee \psi \sim \varphi \oplus \psi$. Следовательно, для получения полинома Жегалкина из СДНФ можно сразу заменить $\vee$ на $\oplus$.

Отметим, что каждый класс Поста замкнут относительно операций замены переменных и суперпозиции, т. е. с помощью этих операций из функций, принадлежащих данному классу, можно получить только функции из этого же класса.

П р и м е р 4.9.3. Определим, к каким классам Поста относится булева функция $f(x, y) = x|y$.

Так как $f(0, 0) = 1$, а $f(1, 1) = 0$, то $f(x, y) \notin P_0$ и $f(x, y) \notin P_1$. Поскольку $f(1, 0) \neq \overline{f(0, 1)}$, то $f(x, y) \notin S$. Так как $f(0, 0) >> f(1, 1)$, то $f(x, y) \notin M$. Полином Жегалкина для функции $f(x, y) = \overline{xy}$ имеет вид $1 \oplus xy$ в силу равенства $\overline{x} = 1 \oplus x$. Поэтому данная функция нелинейна. Таким образом, можно составить следующую таблицу

Функция	Классы				
	P_0	P_1	S	M	$\mathcal{L}$
$x\|y$	Нет	Нет	Нет	Нет	Нет

Теорема 4.9.2 (теорема Поста). *Система $\mathcal{F}$ булевых функций тогда и только тогда является полной, когда для каждого из классов P_0, P_1, S, M, $\mathcal{L}$ в системе $\mathcal{F}$ найдется функция, не принадлежащая этому классу.*

В силу теоремы Поста функция $x|y$ образует полную систему, т. е. с помощью штриха Шеффера можно получить любую булеву функцию. В частности, $\overline{x} \sim x|x$, $x \wedge y \sim \neg\neg(x \wedge y) \sim \neg(x|y) \sim (x|y)|(x|y)$.

Система булевых функций $\mathcal{F}$ называется *базисом*, если она полна, а для любой функции $f \in \mathcal{F}$ система $\mathcal{F} \setminus \{f\}$ неполна.

Теорема 4.9.3. *Каждый базис содержит не более четырех булевых функций.* $\square$

П р и м е р 4.9.4. Следующие системы булевых функций являются базисами: $\{\wedge, \neg\}$, $\{\vee, \neg\}$, $\{\rightarrow, \neg\}$, $\{\downarrow\}$, $\{|\}$, $\{\leftrightarrow, \vee, 0\}$, $\{\oplus, \wedge, \leftrightarrow\}$.

Широкий набор базисов открывает большие возможности при решении задач минимизации схем устройств дискретного действия, поскольку из базисных схем с помощью суперпозиций можно составить схему, соответствующую любой булевой функции.

§ 4.10. Логические сети

1. Определение и реализация булевых функций. Мультиграф $G = \langle M, U, R \rangle$, в котором выделено k вершин (*полюсов*), называется k-*полюсной сетью*. Сеть G, задаваемая неориентированным мультиграфом с k полюсами, в которой каждое ребро помечено буквой из алфавита $X = \{x_1, x_2, \ldots, x_n, \overline{x}_1, \overline{x}_2, \ldots, \overline{x}_n\}$, называется k-*полюсной контактной схемой*.

На рис. 4.10 приведен пример контактной схемы с двумя полюсами a_1 и a_6.

$(k+1)$-Полюсная схема, в которой один полюс выделен (он называется *входным*), а остальные полюса (*выходные*) равноправны, называется $(1, k)$-*полюсником*. Таким образом, если в приведенной на рис. 4.10 двухполюсной схеме рассматривать, например, полюс a_1 как входной, а полюс a_6 как выходной, то получаем $(1, 1)$-*полюсник*.

Ребра контактной схемы называются *контактами*. Контакт, соответствующий логической переменной x_i, называется *замыкающим* и обозначается через . Замыкающий контакт пропускает ток при $x_i = 1$. Контакт, соответствующий литере $\overline{x}_i$, называется *размыкающим* и обозначается как . Через него ток проходит при $x_i = 0$. Таким образом, значение 1 интерпретируется как состояние переключателя "ток проходит", а 0 — "ток не проходит". Функции $x_i \wedge x_j$ соответствует *последовательное соединение контактов*, а функции $x_i \vee x_j$ — *параллельное соединение контактов*.

Нетрудно заметить, что схеме, показанной на рис. 4.10, соответствуют *электрическая схема*, приведенная на рис. 4.11, а также *схема контактов*, изображенная на рис. 4.12. На последнем рисунке показаны контакты, зависящие от значений переменных x_1, x_2, x_3, а также схема соединений контактов.

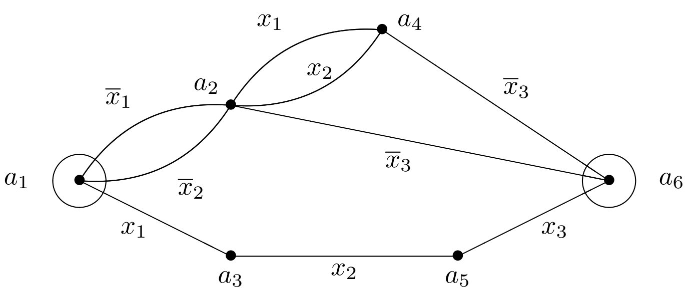


Рис. 4.10

Пусть a, b — полюса контактной схемы Σ, $[a, b]$ — некоторая цепь из a в b, $K_{[a,b]}$ — конъюнкция литер, приписанных ребрам цепи $[a, b]$. Функция $f_{a,b}(X)$, определяемая формулой $f_{a,b}(X) = = \bigvee\limits_{[a,b]} K_{[a,b]}$, в которой дизъюнкция берется по всем простым цепям схемы, соединяющим полюса a и b, называется *функцией проводимости* между полюсами a и b схемы Σ. Говорят, что функция $g(X)$ *реализуется* $(1, k)$-*полюсником*, если существует такой выходной полюс b_i, что $f_{a,b_i}(X) = g(X)$, где a — входной полюс. $(1, 1)$-Полюсники называются *эквивалентными*, если они реализуют одну и ту же булеву функцию. *Сложностью* $(1, 1)$-*полюсника* называется число контактов. $(1, 1)$-полюсник, имеющий наименьшую сложность среди эквивалентных ему схем, называется *минимальным*. Сложность минимального $(1, 1)$-полюсника, реализующего функцию f, называется *сложностью функции* f в классе $(1, 1)$-полюсников и обозначается через $L_\pi(f)$.

Заметим, что задача нахождения минимального $(1, 1)$-полюсника среди эквивалентных данному $(1, 1)$-полюснику Σ равносильна нахождению среди функций, реализуемых схемой Σ, функции, имеющей наименьшее число вхождений переменных. Действительно, функцию, реализуемую $(1, 1)$-полюсником, нетрудно представить в виде форму-

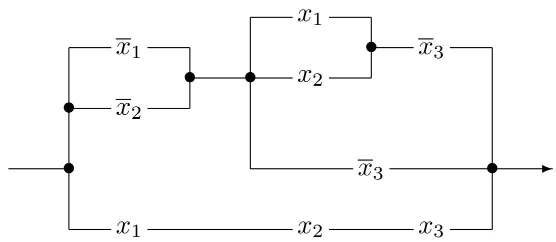


Рис. 4.11

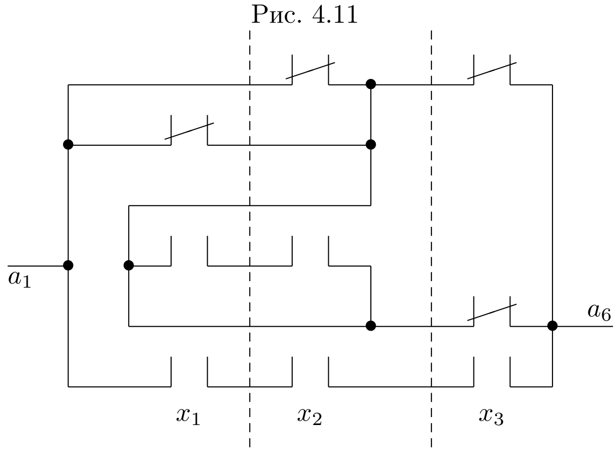
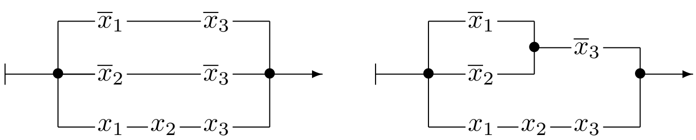


Рис. 4.12



а *б*

Рис. 4.13

лы, которая строится из литер в соответствии с контактной схемой и имеет ровно столько вхождений переменных, сколько контактов имеет схема. Например, изображенной на рис. 4.11 схеме соответствует булева функция

$$f(x_1, x_2, x_3) = (\overline{x}_1 \vee \overline{x}_2) \cdot ((x_1 \vee x_2) \cdot \overline{x}_3 \vee \overline{x}_3) \vee x_1 x_2 x_3. \qquad (4.2)$$

Таким образом, задача нахождения минимального $(1,1)$-полюсника сводится к минимизации соответствующей булевой функции.

Эффективное уменьшение числа контактов достигается с помощью нахождения минимальной ДНФ булевой функции.

Найдем минимальную ДНФ функции (4.2), реализуемой схемой рис. 4.11. Придавая логическим переменным x_1, x_2, x_3 всевозможные значения, по схеме или формуле (4.2) получаем таблицу истинности:

x_1	0	0	0	0	1	1	1	1
x_2	0	0	1	1	0	0	1	1
x_3	0	1	0	1	0	1	0	1
f	1	0	1	0	1	0	0	1

по которой определим совершенную ДНФ: $\overline{x}_1\overline{x}_2\overline{x}_3 \vee \overline{x}_1 x_2 \overline{x}_3 \vee \vee x_1\overline{x}_2\overline{x}_3 \vee x_1x_2x_3$. Используя один из методов нахождения минимальной ДНФ, получаем формулу $\overline{x}_1\overline{x}_3 \vee \overline{x}_2\overline{x}_3 \vee x_1x_2x_3$, эквивалентную формуле (4.2) и соответствующую схеме, состоящей из семи контактов (рис. 4.13*а*).

Отметим, что схема, изображенная на рис. 4.13*а*, допускает упрощение, соответствующее формуле $(\overline{x}_1 \vee \overline{x}_2)\overline{x}_3 \vee x_1x_2x_3$, которое приведено на рис. 4.13*б* и является минимальной схемой. Сложность минимальной схемы равна 6: $L_\pi(f) = 6$.

2. Схемы из функциональных элементов. Ориентированная бесконтурная сеть, в которой полюса делятся на входные (*входы*) и выходные (*выходы*), называется *схемой из функциональных элементов*. Входные полюса помечаются символами переменных, а каждая вершина, отличная от входного полюса, — некоторым функциональным символом. При этом должны выполняться следующие условия:

— если a — входной полюс, то полустепень захода вершины a равна нулю: $\deg^-(a) = 0$;

— если вершина a не является полюсом и помечена n-местным функциональным символом f, то $\deg^-(a) = n$ и дуги, входящие в a, перенумерованы от 1 до n.

Функциональным элементом называется всякий подмультиграф схемы, состоящий из невходного полюса a, помеченного соответствующим символом f, и вершины, из которых исходят дуги в вершину a.

П р и м е р 4.10.1. На рис. 4.14*а* представлена схема из функциональных элементов. Здесь входные символы помечены символами переменных x_1, x_2, x_3; $\neg$ — одноместный функциональный символ, соответствующий операции отрицания; & — двухместный символ, соответствующий операции конъюнкции; f_3 — некоторый двухместный символ; f_1, f_2, f_4 — некоторые трехместные символы. Вершины, помеченные символами f_1, f_3 и f_4, являются выходными полюсами . Им соответствуют термы: $f_1(x_1, x_2, x_3)$, $f_3(\overline{x_1 x_2}, f_1(x_1, x_2, x_3))$,

$$f_4(f_3(\overline{x_1 x_2}, f_1(x_1, x_2, x_3), x_3), x_3, f_2(f_1(x_1, x_2, x_3), f_1(x_1, x_2, x_3), x_3)).$$

На рис. 4.14*б* изображен функциональный элемент, определяемый вершиной, помеченной символом f_4. Ему соответствует устройство, показанное на рис. 4.14*в*. □

В примере 4.10.1 продемонстрировано, что каждый вывод схемы порождает некоторый терм.

Говорят, что функция f *реализуется схемой* Σ, если существует такой выход a схемы Σ, что функция f_a, соответствующая терму выхода a, эквивалентна функции f.

Схемы из функциональных элементов с одним выходом, у которых входные полюса помечены символами x_1, x_2, ..., x_n, а вершины, отличные от входных полюсов, — символами $\vee$, &, $\neg$, называются X^n-*функциональными схемами*. *Сложностью* схемы из функциональных элементов называется число ее вершин, отличных от входных полю-

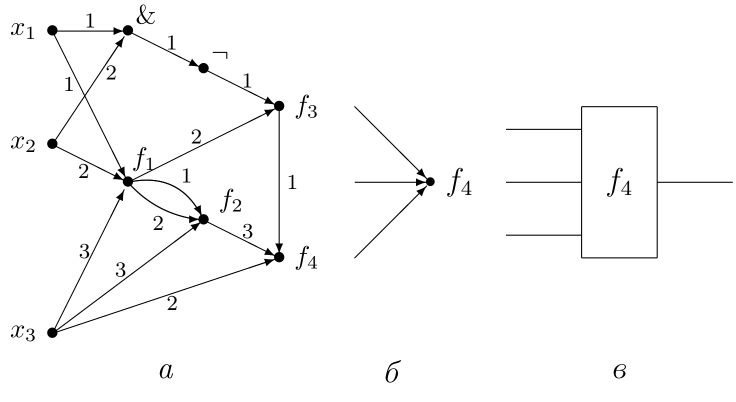


Рис. 4.14

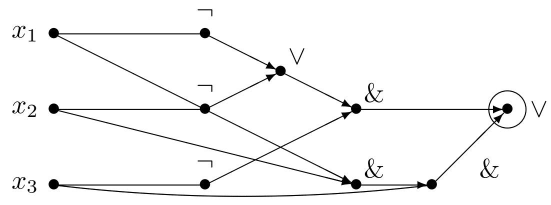


Рис. 4.15

сов. X^n-Функциональная схема Σ, реализующая функцию f, называется *минимальной*, если всякая другая X^n-функциональная схема, реализующая f, имеет сложность, не меньшую, чем сложность схемы Σ. Сложность минимальной схемы, реализующей функцию f, называется *сложностью* функции f в классе схем из функциональных элементов и обозначается через $L(f)$.

Пример 4.10.2. Сложность функции $f = (\overline{x}_1 \vee \overline{x}_2)\overline{x}_3 \vee \vee x_1x_2x_3$ совпадает со сложностью X^3-функциональной схемы, изображенной на рис. 4.15, и равна 8: $L(f) = 8$.

§ 4.11. Проверка теоретико-множественных соотношений с помощью алгебры логики

Проверка истинности теоретико-множественного тождества $A = B$ сводится к записи формул φ и ψ, соответствующих выражениям A и B с последующей проверкой равенства $f_\varphi = f_\psi$

Пример 4.11.1. С помощью алгебры логики проверим истинность соотношения $(A \oplus B) \setminus C = A \oplus (B \setminus C)$ для любых множеств A, B, C.

Сопоставим множествам A, B и C переменные x, y и z соответственно. Выражение $(A \oplus B) \setminus C$ соответствует формуле $(x \oplus y) \wedge \overline{z}$, а выражение $A \oplus (B \setminus C)$ — формуле $x \oplus (y \wedge \overline{z})$. Составив таблицы истинности

x	0	0	0	0	1	1	1	1
y	0	0	1	1	0	0	1	1
z	0	1	0	1	0	1	0	1
$(x \oplus y) \wedge \overline{z}$	0	0	1	0	1	0	0	1

,

x	0	0	0	0	1	1	1	1
y	0	0	1	1	0	0	1	1
z	0	1	0	1	0	1	0	1
$x \oplus (y \wedge \overline{z})$	0	0	1	0	1	1	0	1

,

убеждаемся, что $(x \oplus y) \wedge \overline{z} \not\sim x \oplus (y \wedge \overline{z})$, и формулы имеют разные значения на наборе $(1, 0, 1)$.

Это означает, что данное тождество неверно. Действительно, положив $A = C = \{a\}$, $B = \varnothing$, получаем контрпример к тождеству: $(A \oplus B) \setminus C = A \setminus A = \varnothing$, а $A \oplus (B \setminus C) = A \oplus \varnothing = A$.

§ 4.12. Задачи и упражнения

1. Составить таблицу истинности формулы
$$x \oplus y \to \overline{z} \vee x|\overline{y} \wedge \overline{x}.$$

2. Доказать тождественную истинность формулы
$$(x \to y) \to ((x \to z) \to (x \to y \wedge z)).$$

3. Доказать эквивалентность
$$x \wedge (x \vee z) \wedge (y \vee z) \sim (x \wedge y) \vee (x \wedge z).$$

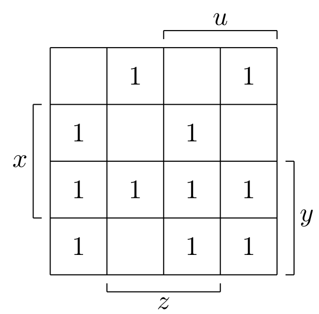
4. Привести к ДНФ, КНФ, СДНФ и СКНФ формулу
$$((x|z \downarrow x) \oplus xy) \leftrightarrow (\overline{z} \to x).$$

5. Используя метод Квайна и карты Карно, найти МДНФ и МКНФ формулы
$$\overline{xyz} \vee \overline{x}y\overline{z} \vee \overline{x}yz \vee x\overline{y}z \vee xy\overline{z}.$$

6. Найти СДНФ и МДНФ по карте Карно, изображенной на рис. 4.16.

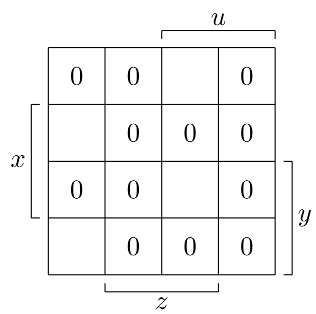
7. Найти СКНФ и МКНФ по карте Карно, изображенной на рис. 4.17.

8. Найти полином Жегалкина для булевой функции f, заданной вектором значений (1011 0100). Определить, каким классам Поста принадлежит функция f.



	1		1
1		1	
1	1	1	1
1		1	1

Рис. 4.16



0	0		0
	0	0	0
0	0		0
	0	0	0

Рис. 4.17

9. Проверить с помощью теоремы Поста полноту следующих систем булевых функций:

$$\text{а})\{\to, \neg\};\ \text{б})\ \{\leftrightarrow, \oplus\};\ \text{в})\ \{\downarrow\};\ \text{г})\ \{\wedge, \to, \oplus\}.$$

   Какие из указанных систем образуют базис?

После изучения главы 4 выполняются задачи 10–16 контрольной работы. Задача 10 решается аналогично примеру 4.1.1, задача 11 — аналогично примерам 4.3.1 и 4.4.7, задача 12 — аналогично примерам 4.4.3, 4.4.4 и 4.4.7, задача 13 — аналогично примерам 4.6.3, 4.6.4, 4.7.3 и 4.9.3, задача 14 — аналогично примеру 4.7.3, задача 15 — аналогично примеру 4.9.3, а задачи 16 и 17 — аналогично примеру 4.11.1.

Варианты контрольной работы

Условия задач

1. Докажите тождества, используя только определения операций над множествами.

2. Докажите методом математической индукции.

3. Докажите утверждение.

4. $A = \{a, b, c\}$, $B = \{1, 2, 3, 4\}$, $P_1 \subseteq A \times B$, $P_2 \subseteq B^2$. Изобразите P_1, P_2 графически. Найдите $[(P_1 \circ P_2)^{-1}]$. Проверьте с помощью матрицы $[P_2]$, является ли отношение P_2 рефлексивным, симметричным, антисимметричным, транзитивным?

5. Найдите область определения, область значений отношения P. Является ли отношение P рефлексивным, симметричным, антисимметричным, транзитивным?

6. Является ли алгеброй следующий набор $\mathfrak{B} = \langle B; \Sigma \rangle$?

7. Постройте подсистему $\mathfrak{B}(X)$, если...

8. Даны графы G_1 и G_2. Найдите $G_1 \cup G_2$, $G_1 \cap G_2$, $G_1 \oplus G_2$, $G_1 \times G_2$. Для графа $G_1 \cup G_2$ найдите матрицы смежности, инцидентности, сильных компонент, маршрутов длины 2 и все маршруты длины 2, исходящие из вершины 1.

9. Найдите матрицы фундаментальных циклов, фундаментальных разрезов, радиус и диаметр, минимальное множество покрывающих цепей графа G. Является ли изображенный граф эйлеровым? Является ли изображенный граф планарным?

10. Составьте таблицы истинности формул.

11. Проверьте двумя способами, будут ли эквивалентны следующие формулы...

    а) составлением таблиц истинности;

    б) приведением формул к СДНФ или СКНФ с помощью эквивалентных преобразований.

12. С помощью эквивалентных преобразований приведите формулу к ДНФ, КНФ, СДНФ, СКНФ. Постройте полином Жегалкина.

13. Найдите сокращенную, все тупиковые и минимальные ДНФ булевой функции $f(x, y, z)$ двумя способами:

    а) методом Квайна; б) с помощью карт Карно.

    Каким классам Поста принадлежит эта функция?

14. С помощью карт Карно найдите сокращенную, все тупиковые и минимальные ДНФ, КНФ булевой функции $f(x_1, x_2,\ x_3, x_4)$, заданной вектором своих значений.

15. Является ли полной система функций? Образует ли она базис?

16. С помощью алгебры логики проверьте истинность соотношения для любых множеств A, B, C. Если соотношение неверно, постройте контрпример.

17. С помощью алгебры логики докажите первое тождество из задания 1.

Вариант 1

1. $A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$,
   $A \times (B \cup C) = (A \times B) \cup (A \times C)$.

2. $n^7 - n$ кратно 7 для всех $n > 0$.

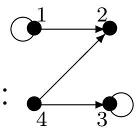
3. $|\mathbb{Q}^2| = \omega$.

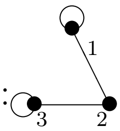
4. $P_1 = \{\langle a, 3\rangle, \langle a, 2\rangle, \langle a, 4\rangle, \langle b, 1\rangle, \langle c, 2\rangle, \langle c, 4\rangle, \langle c, 3\rangle\}$,
   $P_2 = \{\langle 1, 1\rangle, \langle 2, 2\rangle, \langle 2, 1\rangle, \langle 3, 3\rangle, \langle 4, 4\rangle, \langle 4, 3\rangle, \langle 1, 4\rangle, \langle 2, 4\rangle,$
   $\langle 3, 2\rangle, \langle 3, 4\rangle\}$.

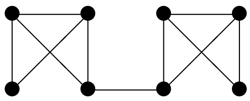
5. $P \subseteq (\mathbb{Z}^+)^2$, $\langle x, y\rangle \in P \Leftrightarrow x^2 = y$,
   где $\mathbb{Z}^+ = \{x \in \mathbb{Z} \mid x > 0\}$.

6. $\langle \mathbb{Z}; +, \cdot, 1 - i\rangle$.

7. $\mathfrak{B} = \langle \mathbb{C}; \cdot\rangle$, $X = \{\mathrm{e}^{i\frac{\pi}{4}}\}$.

8. G_1: 

   G_2: 

9. G: 

10. $(x \wedge y) \leftrightarrow (y \downarrow \overline{x})$, $(x \to \overline{y})|(z \oplus \overline{x \vee y})$.

11. $x \leftrightarrow (y \oplus z)$ и $(x \leftrightarrow y) \oplus (x \leftrightarrow z)$.

12. $(\overline{x} \vee y) \to \overline{(\overline{z} \leftrightarrow x)}$.

13. $f(0, 0, 1) = f(0, 1, 1) = f(1, 1, 0) = 0$.

14. (0011 0011 0101 1100).

15. $\mathfrak{I} = \{x \to y, \overline{x} \wedge y\}$.

16. $(A \setminus B) \setminus (A \cap C) = A \setminus (B \cup C)$.

Вариант 2

1. $A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$,
   $(A \cup B) \times C = (A \times C) \cup (B \times C)$.

2. $7^n - 1$ кратно 6 для всех $n \geqslant 1$.

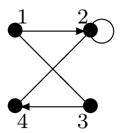
3. $A^{B \cup C} \sim A^B \times A^C$, если $B \cap C = \varnothing$.

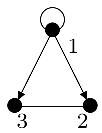
4. $P_1 = \{\langle b, 2\rangle, \langle a, 3\rangle, \langle b, 1\rangle, \langle b, 4\rangle, \langle c, 1\rangle, \langle c, 2\rangle, \langle c, 4\rangle\}$,
   $P_2 = \{\langle 1, 1\rangle, \langle 1, 2\rangle, \langle 1, 4\rangle, \langle 2, 2\rangle, \langle 2, 4\rangle, \langle 3, 3\rangle, \langle 3, 2\rangle, \langle 3, 4\rangle, \langle 4, 4\rangle\}$.

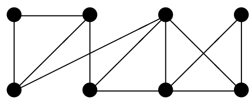
5. $P \subseteq (\mathbb{Z}^+)^2$, $\langle x, y\rangle \in P \Leftrightarrow x^2 \neq y$,
   где $\mathbb{Z}^+ = \{x \in \mathbb{Z} \mid x > 0\}$.

6. $\langle \mathbb{C} \setminus \{0\}; +, \cdot\rangle$.

7. $\mathfrak{B} = \langle \mathbb{C}; +, \cdot\rangle$, $X = \{2i\}$.

8. G_1: 

   G_2: 

9. G: 

10. $(x \downarrow (\overline{y} \oplus (y \to \overline{x}))$, $x \vee (\overline{y} | \overline{z} \oplus \overline{xy})$.

11. $x \to (y \downarrow z)$ и $(x \to y) \downarrow (x \to z)$.

12. $\overline{((x \leftrightarrow y) | \overline{z}) \oplus y}$.

13. $f(0,0,0) = f(0,0,1) = f(1,0,0) = f(1,1,0) = 0$.

14. (1110 1001 0111 0001).

15. $\mathfrak{I} = \{\overline{x} \downarrow y, \overline{x} \leftrightarrow \overline{y}\}$.

16. $(A \oplus B) \cap (A \oplus C) = A \setminus (B \cap C)$.

Вариант 3

1. $A \cap B = \overline{\overline{A} \cup \overline{B}}$,
   $A \times (B \setminus C) = (A \times B) \setminus (A \times C)$.

2. $n^3 + 11n$ кратно 6 для всех $n \in \omega$.

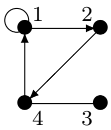
3. $|A| \geqslant \omega$, $|B| < \omega \Rightarrow |A \setminus B| = |A|$.

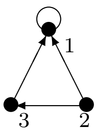
4. $P_1 = \{\langle a, 2\rangle, \langle a, 3\rangle, \langle a, 4\rangle, \langle b, 3\rangle, \langle c, 1\rangle, \langle c, 4\rangle\}$,
   $P_2 = \{\langle 1, 1\rangle, \langle 2, 3\rangle, \langle 2, 2\rangle, \langle 3, 4\rangle, \langle 1, 4\rangle, \langle 2, 4\rangle, \langle 4, 2\rangle\}$.

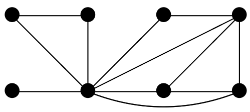
5. $P \subseteq (\mathbb{Z}^+)^2$, $\langle x, y\rangle \in P \Leftrightarrow x^2 > y$,
   где $\mathbb{Z}^+ = \{x \in \mathbb{Z} \mid x > 0\}$.

6. $\langle \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}; +, -, \sqrt{\ }, 2 - i\rangle$.

7. $\mathfrak{B} = \langle \mathbb{C}; \cdot\rangle$, $X = \{3i\}$.

8. G_1: 

   G_2: 

9. G: 

10. $x|(\overline{y} \oplus (y \vee x))$, $x \to (\overline{y} \downarrow (\overline{z} \leftrightarrow \overline{xy}))$.

11. $x \downarrow (y|z)$ и $(x \downarrow y)|(x \downarrow z)$.

12. $(\overline{(x \downarrow y)} \to (z \leftrightarrow \overline{y})$.

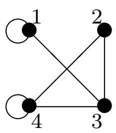
13. $f(0, 1, 1) = f(1, 0, 0) = f(1, 0, 1) = 1$.

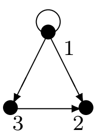
14. $(0001\ 0011\ 1100\ 1110)$.

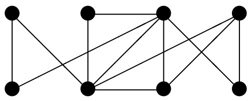
15. $\mathfrak{I} = \{\overline{x} \oplus \overline{y}, \overline{x} \vee y\}$.

16. $(A \cup B) \oplus (A \cap C) = A \oplus (B \setminus C)$.

Вариант 4

1. $A \setminus (B \cup C) = (A \setminus B) \cap (A \setminus C)$,
   $A \times (B \cap C) = (A \times B) \cap (A \times C)$.
2. $1 \cdot 4 + 2 \cdot 7 + 3 \cdot 10 + \dots + n(3n+1) = n(n+1)^2$.
3. $\omega + \omega = \omega$.
4. $P_1 = \{\langle a, 1\rangle, \langle a, 2\rangle, \langle b, 3\rangle, \langle c, 2\rangle, \langle c, 3\rangle, \langle c, 4\rangle\}$,
   $P_2 = \{\langle 1, 1\rangle, \langle 2, 1\rangle, \langle 2, 2\rangle, \langle 2, 3\rangle, \langle 2, 4\rangle, \langle 3, 3\rangle, \langle 4, 4\rangle\}$.
5. $P \subseteq \mathbb{R}^2$, $\langle x, y\rangle \in P \Leftrightarrow x^2 + y^2 = 1$.
6. $\langle \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}; +, \cdot, : \rangle$.
7. $\mathfrak{B} = \langle \mathbb{C}; +, i\rangle$, $X = \mathbb{R}$.
8. G_1: 

   G_2: 

9. G: 
10. $x \oplus (\overline{y} \to (y \leftrightarrow \overline{x}))$, $x \downarrow (\overline{y} | (z \vee \overline{xy}))$.
11. $x \leftrightarrow (y|z)$ и $(x \leftrightarrow y)|(x \leftrightarrow z)$.
12. $\overline{((x \downarrow y) \to \overline{z}) \leftrightarrow y}$.
13. $f(0,0,1) = f(1,0,0) = f(1,1,0) = 1$.
14. (0011 1100 0011 0101).
15. $\mathfrak{I} = \{\overline{x} \wedge \overline{y}, \overline{x} \to y\}$.
16. $(A \cup B) \setminus (B \cap C) = (A \setminus B) \cup (A \setminus C)$.

Вариант 5

1. $(A \cup B) \setminus C = (A \setminus C) \cup (B \setminus C)$,
   $(A \cap B) \times C = (A \times C) \cap (B \times C)$.

2. $10^n - 1$ кратно 9 для всех $n \in \omega$.

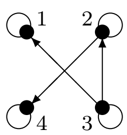
3. $[0,1] \cup [2,3] \sim [0,1]$.

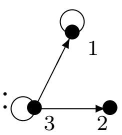
4. $P_1 = \{\langle a,1\rangle, \langle a,2\rangle, \langle a,3\rangle, \langle a,4\rangle, \langle b,3\rangle, \langle c,2\rangle\}$,
   $P_2 = \{\langle 1,1\rangle, \langle 1,4\rangle, \langle 2,2\rangle, \langle 2,3\rangle, \langle 3,3\rangle, \langle 3,2\rangle, \langle 4,1\rangle, \langle 4,4\rangle\}$.

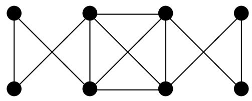
5. $P \subseteq \mathbb{R}^2$, $\langle x,y\rangle \in P \Leftrightarrow x \cdot y > 1$.

6. $\langle \omega; +, 0\rangle$.

7. $\mathfrak{B} = \langle \mathbb{Z}; +, -\rangle$, $X = \{-5, 4\}$.

8. G_1: 

   G_2: 

9. G: 

10. $(x \vee \overline{y}) \to (y \oplus \overline{x})$, $x \downarrow (\overline{y} \leftrightarrow (z \downarrow \overline{xy}))$.

11. $x \to (y \leftrightarrow z)$ и $(x \to y) \leftrightarrow (x \to z)$.

12. $\overline{x \vee \overline{y}} \to (\overline{z} \leftrightarrow y)$.

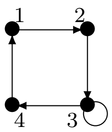
13. $f(0,1,1) = f(0,1,0) = f(1,0,0) = f(1,0,1) = 0$.

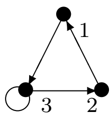
14. $(1010\ 0010\ 1101\ 0111)$.

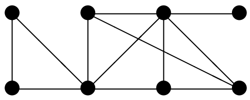
15. $\mathfrak{J} = \{\overline{x} \downarrow \overline{y}, x \leftrightarrow y\}$.

16. $(A \setminus B) \cup (C \setminus B) = (B \cup C) \setminus A$.

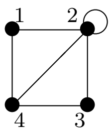
Вариант 6

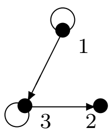
1. $\overline{A}\cup B=\overline{A\cap\overline{B}}$,
   $(A\cap(B)\times(C\cap D)=(A\times C)\cap(B\times D)$.
2. $1\cdot 2+2\cdot 3+3\cdot 4+\ldots+n(n+1)=\frac{n(n+1)(n+2)}{3}$.
3. $2^{\omega}+2^{\omega}=2^{\omega}$.
4. $P_1=\{\langle a,1\rangle,\langle a,2\rangle,\langle a,4\rangle,\langle c,3\rangle,\langle c,2\rangle,\langle c,4\rangle\}$,
   $P_2=\{\langle 2,1\rangle,\langle 3,1\rangle,\langle 3,2\rangle,\langle 4,1\rangle,\langle 4,3\rangle\}$.
5. $P\subseteq\mathbb{R}^2$, $\langle x,y\rangle\in P\Leftrightarrow y=|x|$.
6. $\langle\mathbb{Q}\setminus\mathbb{Z};+,\cdot,:\rangle$.
7. $\mathfrak{B}=\langle\mathbb{Z};+,\cdot\rangle$, $X=\{-5\}$.
8. G_1: 

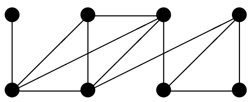
   G_2: 

9. G: 
10. $x\leftrightarrow(y\wedge(\overline{y}\to x))$, $x\vee(\overline{y}\oplus(z\downarrow\overline{x|y}))$.
11. $x\to(y\downarrow z)$ и $(x\to y)\downarrow(x\to z)$.
12. $(\overline{(x\leftrightarrow y)}\to\overline{z})|y$.
13. $f(0,1,1)=f(0,1,0)=f(1,0,1)=f(1,1,1)=1$.
14. (0011 1101 0010 1100).
15. $\mathfrak{J}=\{x\vee\overline{y},\overline{x}\leftrightarrow y\}$.
16. $A\setminus(B\setminus C)=(A\setminus B)\setminus C$.

Вариант 7

1. $A \setminus (B \cap C) = (A \setminus B) \cup (A \setminus C)$,
   $(A \setminus B) \times C = (A \times C) \setminus (B \times C)$.
2. $\frac{1}{1 \cdot 2} + \frac{1}{2 \cdot 3} + \frac{1}{3 \cdot 4} + \ldots + \frac{1}{n(n+1)} = \frac{n}{n+1}$.
3. $[a, b] \sim \mathbb{R}$.
4. $P_1 = \{\langle a, 1\rangle, \langle a, 2\rangle, \langle b, 2\rangle, \langle b, 4\rangle, \langle c, 3\rangle, \langle c, 2\rangle\}$,
   $P_2 = \{\langle 1, 1\rangle, \langle 1, 2\rangle, \langle 2, 2\rangle, \langle 3, 3\rangle, \langle 4, 3\rangle, \langle 4, 4\rangle\}$.
5. $P \subseteq \mathbb{R}^2$, $\langle x, y\rangle \in P \Leftrightarrow x^2 + x = y^2 + y$.
6. $\langle \mathbb{R}; \cdot, :, -1\rangle$.
7. $\mathfrak{B} = \langle \mathbb{Z}; +, -\rangle$, $X = \{-3, 4\}$.
8. G_1: 

   G_2: 

9. G: 
10. $(x \vee y) \leftrightarrow (y \downarrow \overline{x})$, $x|\overline{y}) \to (z \oplus \overline{xy})$.
11. $x \to (y \oplus z)$ и $(x \to y) \oplus (x \to z)$.
12. $(x \vee \overline{y}) \to (\overline{z} \oplus \overline{x})$.
13. $f(0, 1, 0) = f(1, 0, 0) = f(1, 0, 1) = 0$.
14. (1101 1101 0011 0011).
15. $\mathfrak{I} = \{x \vee y, \overline{x} \oplus y\}$.
16. $(A \cup B) \setminus (C \cap A) = (B \setminus C) \setminus (A \cup C)$.

Вариант 8

1. $\overline{A \cup B} = \overline{A} \cap \overline{B}$,
   $C \subseteq D \Rightarrow A \times C \subseteq B \times D$.

2. $(1 - \frac{1}{4})(1 - \frac{1}{9})(1 - \frac{1}{16}) \ldots (1 - \frac{1}{n^2}) = \frac{n+1}{2n}$ для $n \geqslant 2$.

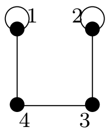
3. $|\mathbb{Z} \times \mathbb{Q}| = \omega$.

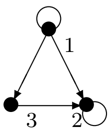
4. $P_1 = \{\langle a, 1\rangle, \langle a, 4\rangle, \langle b, 2\rangle, \langle b, 3\rangle, \langle c, 1\rangle, \langle c, 4\rangle\}$,
   $P_2 = \{\langle 1, 1\rangle, \langle 1, 4\rangle, \langle 2, 1\rangle, \langle 3, 4\rangle, \langle 4, 3\rangle, \langle 4, 1\rangle\}$.

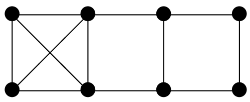
5. $P \subseteq \mathbb{R}^2$, $\langle x, y\rangle \in P \Leftrightarrow x - y \in \mathbb{Z}$.

6. $\langle \mathbb{R}; \sqrt{}, -\rangle$.

7. $\mathfrak{B} = \langle \mathbb{Z}; +, -\rangle$, $X = \{4, 10\}$.

8. G_1: 

   G_2: 

9. G: 

10. $(x \leftrightarrow \overline{y}) \vee (y \downarrow x)$, $((x \rightarrow \overline{y})|\overline{z}) \oplus \overline{xy}$.

11. $x|(y \rightarrow z)$ и $(x|y) \rightarrow (x|z)$.

12. $(\overline{x \vee \overline{y}) \rightarrow (z \oplus \overline{x})}$.

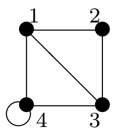
13. $f(0, 1, 1) = f(1, 0, 0) = f(1, 1, 0) = 0$.

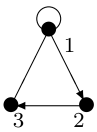
14. (1111 1100 1011 1011).

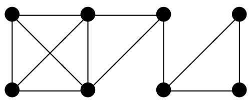
15. $\mathfrak{I} = \{x \rightarrow y, \overline{x} \wedge \overline{y}\}$.

16. $(A \cup B) \setminus (C \cap B) = (A \setminus C) \cup (A \setminus B)$.

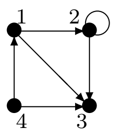
Вариант 9

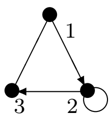
1. $(A \cap B) \setminus C = (A \setminus C) \cap (B \setminus C)$,
   $(A \times B) \cup (C \times D) \subseteq (A \cup C) \times (B \cup D)$.
2. $1^2 + 2^2 + 3^2 + \ldots + n^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$.
3. $[0, 1] \sim [0, 1)$.
4. $P_1 = \{\langle a, 1\rangle, \langle a, 2\rangle, \langle a, 4\rangle, \langle b, 1\rangle, \langle b, 4\rangle, \langle c, 3\rangle\}$,
   $P_2 = \{\langle 1, 1\rangle, \langle 2, 4\rangle, \langle 2, 1\rangle, \langle 3, 3\rangle, \langle 4, 2\rangle, \langle 4, 1\rangle\}$.
5. $P \subseteq \mathbb{R}^2$, $\langle x, y\rangle \in P \Leftrightarrow x + y = -2$.
6. $\langle \mathbb{Q}; \sqrt{\ }, :\rangle$.
7. $\mathfrak{B} = \langle \omega; +, \cdot, 3\rangle$, $X = \{2, 5\}$.
8. G_1: 

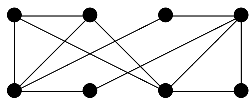
   G_2: 

9. G: 
10. $(x \vee \overline{y}) \leftrightarrow (y \downarrow x)$, $((x|\overline{y}) \to \overline{z}) \oplus \overline{xy}$.
11. $x \wedge (y \oplus z)$ и $(x \wedge y) \oplus (x \wedge z)$.
12. $(\overline{x} \vee \overline{y}) \to \overline{(z \oplus x)}$.
13. $f(0, 0, 0) = f(0, 0, 1) = f(1, 0, 1) = f(1, 1, 1) = 1$.
14. $(1110\ 0101\ 0011\ 0101)$.
15. $\mathfrak{J} = \{x \leftrightarrow y, \overline{x}|\overline{y}\}$.
16. $(A \cup C) \setminus (B \cap A) = (A \setminus B) \setminus (A \cap C)$.

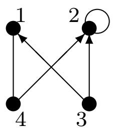
Вариант 10

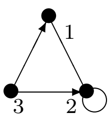
1. $A \cup (A \cap B) = A \cap (A \cup B) = A$,
   $(A \cup B) \times (C \cup D) = (A \times C) \cup (B \times C) \cup (A \times D) \cup (B \times D)$.
2. $\frac{1}{2!} + \frac{2}{3!} + \ldots + \frac{n-1}{n!} = 1 - \frac{1}{n!}$ для $n \geqslant 2$.
3. $[0,1] \sim (0,1]$.
4. $P_1 = \{\langle a,1\rangle, \langle b,3\rangle, \langle b,1\rangle, \langle b,4\rangle, \langle c,3\rangle, \langle c,2\rangle\}$,
   $P_2 = \{\langle 1,3\rangle, \langle 1,4\rangle, \langle 2,2\rangle, \langle 3,3\rangle, \langle 4,3\rangle, \langle 4,4\rangle\}$.
5. $P \subseteq \mathbb{R}^2$, $\langle x,y\rangle \in P \Leftrightarrow x^2 + y^2 = 4$.
6. $\langle \mathbb{Z}; +, -, -2\rangle$.
7. $\mathfrak{B} = \langle \mathbb{R} \setminus \{0\}; :, 1\rangle$, $X = \{2\}$.
8. G_1: 

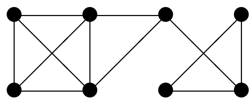
   G_2: 

9. G: 
10. $(x \leftrightarrow \overline{y}) \vee (y \downarrow x)$, $((x \rightarrow \overline{y}) | \overline{z}) \oplus \overline{xy}$.
11. $x \wedge (y \oplus z)$ и $(x \wedge y) \oplus (x \wedge z)$.
12. $(x \vee \overline{y}) \rightarrow \overline{(z \leftrightarrow \overline{x})}$.
13. $f(0,0,1) = f(1,1,1) = f(1,1,0) = 0$.
14. (1101 0011 1101 0011).
15. $\mathfrak{I} = \{x \oplus y, \overline{x} \vee y\}$.
16. $(A \cap B) \cup (A \setminus C) = A \setminus (B \cup C)$.

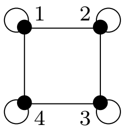
Вариант 11

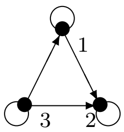
1. $(A \setminus B) \setminus C = A \setminus (B \cup C)$,
   $A \subseteq C$, $B \subseteq D \Rightarrow A \times B = (A \times D) \cap (C \times B)$.
2. $1 \cdot 2 + 2 \cdot 5 + 3 \cdot 8 + \ldots + n(3n-1) = n^2(n+1)$.
3. $\omega^2 \sim \omega^3$.
4. $P_1 = \{\langle a,1\rangle, \langle b,3\rangle, \langle c,1\rangle, \langle c,4\rangle, \langle c,3\rangle, \langle c,2\rangle\}$,
   $P_2 = \{\langle 1,1\rangle, \langle 1,2\rangle, \langle 1,4\rangle, \langle 2,1\rangle, \langle 2,2\rangle, \langle 2,3\rangle\ \langle 3,3\rangle, \langle 3,2\rangle,$
   $\langle 3,4\rangle, \langle 4,3\rangle, \langle 4,4\rangle, \langle 4,1\rangle\}$.
5. $P \subseteq \mathbb{R}^2$, $\langle x,y\rangle \in P \Leftrightarrow y < x - 1$.
6. $P_1 = \{\langle a,2\rangle, \langle a,4\rangle, \langle b,3\rangle, \langle c,1\rangle, \langle c,2\rangle\}$,
   $P_2 = \{\langle 1,1\rangle, \langle 1,3\rangle, \langle 2,4\rangle, \langle 3,1\rangle, \langle 3,4\rangle, \langle 4,3\rangle, \langle 4,2\rangle\}$.
7. $P \subseteq \mathbb{Z}^2$, $\langle x,y\rangle \in P \Leftrightarrow x^2 + y^2 = 1$.
8. $\langle \mathbb{Q}; \sqrt{\ }, \cdot, -10\rangle$.
9. $\mathfrak{B} = \langle \mathbb{Z}^3; +, -\rangle$, $X = \{\langle 0,1,1\rangle, \langle 0,0,1\rangle\}$.
10. G_1: 

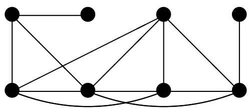
G_2: 

11. G: 
12. $(x \vee \overline{y}) \to (y \oplus x)$, $((x \leftrightarrow \overline{y}) | \overline{z}) \downarrow \overline{xy}$.
13. $x \wedge (y \to z)$ и $(x \wedge y) \to (x \wedge z)$.
14. $\overline{(x \vee \overline{y}) \to (z \leftrightarrow \overline{x})}$.
15. $f(0,0,0) = f(1,1,1) = f(1,1,0) = 0$.
16. $(1100\ 1011\ 1111\ 1011)$.
17. $\mathfrak{J} = \{\overline{x} \to y, x \wedge \overline{y}\}$.
18. $(A \setminus B) \cup (A \setminus C) = A \setminus (B \cup C)$.

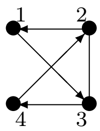
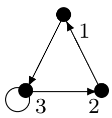
Вариант 12

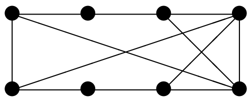
1. $A \setminus (B \setminus C) = (A \setminus B) \cup (A \cap C)$,
   $U^2 \setminus (A \times B) = (\overline{A} \times U) \cup (U \times \overline{B})$.
2. $n^3 + 5n$ кратно 6 для всех $n \in \omega$.
3. $\omega + n = \omega$.
4. $P_1 = \{\langle a, 1\rangle, \langle a, 2\rangle, \langle a, 4\rangle, \langle b, 3\rangle, \langle c, 1\rangle, \langle c, 4\rangle\}$,
   $P_2 = \{\langle 1, 3\rangle, \langle 1, 2\rangle, \langle 2, 3\rangle, \langle 3, 2\rangle, \langle 3, 4\rangle, \langle 4, 1\rangle\}$.
5. $P \subseteq \mathbb{R}^2$, $\langle x, y\rangle \in P \Leftrightarrow x^2 = y$.
6. $\langle \mathbb{R} \setminus \mathbb{Z}; +, \cdot\rangle$.
7. $\mathfrak{B} = \langle \mathbb{Q}; \cdot, \frac{1}{2}\rangle$, $X = \{3\}$.
8. G_1: 

   G_2: 

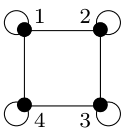
9. G: 
10. $(x \oplus \overline{y}) \leftrightarrow (y | x)$, $((x \downarrow y) \leftrightarrow \overline{z}) \vee \overline{xy}$.
11. $x \wedge (y \leftrightarrow z)$ и $(x \wedge y) \leftrightarrow (x \wedge z)$.
12. $\overline{(x | \overline{y}) \oplus (z \to \overline{x})}$.
13. $f(0,0,1) = f(0,1,1) = f(1,1,0) = f(1,1,1) = 1$.
14. (0101 0101 1110 0011).
15. $\mathfrak{J} = \{\overline{x} \leftrightarrow y, x | \overline{y}\}$.
16. $(A \setminus B) \cap (A \setminus C) = A \setminus (B \cap C)$.

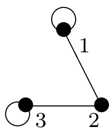
Вариант 13

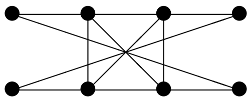
1. $A \cup (B \setminus C) = (A \cup B) \setminus (C \setminus A)$; $A, B \neq \varnothing$,
   $(A \times B) \cup (B \times A) = (C \times D) \Rightarrow A = B = C = D$.
2. $4^n - 1$ кратно 3 для всех $n > 0$.
3. $\omega^2 \sim \mathbb{Z}$.
4. $P_1 = \{\langle a, 3\rangle, \langle a, 2\rangle, \langle b, 2\rangle, \langle b, 3\rangle, \langle c, 1\rangle, \langle c, 4\rangle\}$,
   $P_2 = \{\langle 1, 1\rangle, \langle 1, 2\rangle, \langle 2, 2\rangle, \langle 3, 3\rangle, \langle 4, 1\rangle, \langle 4, 4\rangle\}$.
5. $P \subseteq \mathbb{R}^2$, $\langle x, y\rangle \in P \Leftrightarrow x^2 \geqslant y$.
6. $\langle \mathbb{Q}; +, -, :, \frac{1}{3}\rangle$.
7. $\mathfrak{B} = \langle \mathbb{Z}; +, \cdot\rangle$, $X = \{-2, 16\}$.
8. G_1:  G_2: 

9. G: 
10. $(x \vee \overline{y}) \downarrow (y \to x)$, $((x|\overline{y}) \leftrightarrow \overline{z}) \oplus \overline{xy}$.
11. $x \wedge (y|z)$ и $(x \wedge y)|(x \wedge z)$.
12. $\overline{(z \to x) \leftrightarrow (y|x)}$.
13. $f(0,0,0) = f(1,0,1) = f(1,1,1) = 0$.
14. (0011 0011 1101 1101).
15. $\mathfrak{I} = \{x \oplus \overline{y}, \overline{x} \vee y\}$.
16. $(A \oplus B) \setminus (A \oplus C) = A \setminus (B \oplus C)$.

Вариант 14

1. $A \cap (B \setminus C) = (A \cap B) \setminus (A \cap C)$,
   $(A \times B) \cup (C \times D) \subseteq (A \cup C) \times (B \cup D)$.
2. $4^n + 15n - 1$ кратно 9 для всех натуральных n.
3. $\omega^2 \sim \mathbb{Z}^2$.
4. $P_1 = \{\langle a, 2\rangle, \langle a, 4\rangle, \langle b, 3\rangle, \langle c, 1\rangle, \langle c, 2\rangle\}$,
   $P_2 = \{\langle 1, 1\rangle, \langle 1, 3\rangle, \langle 2, 4\rangle, \langle 3, 1\rangle, \langle 3, 4\rangle, \langle 4, 3\rangle, \langle 4, 2\rangle\}$.
5. $P \subseteq \mathbb{Z}^2$, $\langle x, y\rangle \in P \Leftrightarrow x^2 + y^2 = 1$.
6. $\langle \mathbb{R} \setminus \{0\}; +, :\rangle$.
7. $\mathfrak{B} = \langle \mathbb{Q}; +, \cdot\rangle$, $X = \{2, \frac{1}{2}\}$.
8. G_1: 

   G_2: 

9. G: 
10. $(x \oplus \overline{y}) \to (y \downarrow x)$, $((x|\overline{y}) \vee \overline{z}) \leftrightarrow \overline{xy}$.
11. $x \vee (y \to z)$ и $(x \vee y) \to (x \vee z)$.
12. $(x|\overline{y}) \oplus (\overline{z} \to x)$.
13. $f(1,0,1) = f(0,1,0) = f(1,1,1) = 0$.
14. (1011 1011 1100 1111).
15. $\mathfrak{J} = \{x \to \overline{y}, \overline{x} \wedge y\}$.
16. $(A \setminus B) \oplus (A \setminus C) = A \oplus (B \setminus C)$.

Вариант 15

1. $\overline{A \cap B} = \overline{A} \cup \overline{B}$,
   $U^2 \setminus (C \times D) = (\overline{C} \times U) \cup (U \times \overline{D})$.

2. $11^{n+1} + 12^{2n-1}$ кратно 133 для всех $n > 0$.

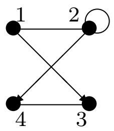
3. $(0, 1] \sim [0, +\infty)$.

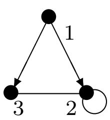
4. $P_1 = \{\langle b, 1\rangle, \langle b, 3\rangle, \langle c, 1\rangle, \langle c, 2\rangle, \langle c, 3\rangle, \langle c, 4\rangle\}$,
   $P_2 = \{\langle 1, 1\rangle, \langle 2, 2\rangle, \langle 2, 3\rangle, \langle 2, 4\rangle, \langle 3, 2\rangle, \langle 3, 3\rangle, \langle 3, 4\rangle, \langle 4, 2\rangle,$
   $\langle 4, 3\rangle, \langle 4, 4\rangle\}$.

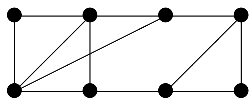
5. $P \subseteq \mathbb{Z}^2$, $\langle x, y\rangle \in P \Leftrightarrow x + y$ кратно 3.

6. $\langle \omega; :, -1\rangle$.

7. $\mathfrak{B} = \langle \mathbb{R}^2; +, -\rangle$, $X = \{\langle 1, 2\rangle, \langle 0, 1\rangle\}$.

8. G_1: 

   G_2: 

9. G: 

10. $\overline{x} \leftrightarrow (y \to (\overline{y} \downarrow x))$, $((\overline{x}|y) \vee \overline{z}) \oplus \overline{xy}$.

11. $x \vee (y|z)$ и $(x \vee y)|(x \vee z)$.

12. $(\overline{z} \to x) \leftrightarrow (\overline{x}|y)$.

13. $f(1, 0, 0) = f(1, 1, 0) = f(0, 1, 1) = f(0, 1, 0) = 1$.

14. (0101 0011 0101 1110).

15. $\mathfrak{I} = \{x \leftrightarrow \overline{y}, \overline{x}|y\}$.

16. $(A \cup B) \oplus (A \cup C) = A \cup (B \oplus C)$.

Вариант 16

1. $(A \cap B) \cup (A \cap \overline{B}) = (A \cup B) \cap (A \cup \overline{B}) = A$;
   $(A \cup B) \times (C \cup D) = (A \times C) \cup (B \times C) \cup (A \times D) \cup (B \times D)$.

2. $9^{n+1} - 8n - 9$ кратно 16 для всех $n \geqslant 0$.

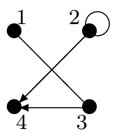
3. $2^\omega + \omega = 2^\omega$.

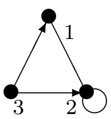
4. $P_1 = \{\langle a, 1\rangle, \langle a, 2\rangle, \langle a, 4\rangle, \langle b, 2\rangle, \langle b, 4\rangle, \langle c, 3\rangle\}$,
   $P_2 = \{\langle 1, 1\rangle, \langle 2, 2\rangle, \langle 2, 4\rangle, \langle 3, 3\rangle, \langle 4, 4\rangle, \langle 4, 2\rangle\}$.

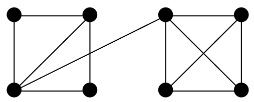
5. $P \subseteq \mathbb{Z}^2$, $\langle x, y\rangle \in P \Leftrightarrow x - y$ кратно 2.

6. $\langle \omega; +, \cdot, :\rangle$.

7. $\mathfrak{B} = \langle \mathbb{Q}; +, \cdot\rangle$, $X = \{\frac{1}{2}\}$.

8. G_1: 

   G_2: 

9. G: 

10. $x \downarrow (\overline{y} \to (y|x))$, $x \oplus (\overline{y} \vee \overline{z} \leftrightarrow \overline{xy})$.

11. $x \vee (y \leftrightarrow z)$ и $(x \vee y) \leftrightarrow (x \vee z)$.

12. $(z \to x) \oplus (x|\overline{y})$.

13. $f(0, 1, 1) = f(1, 0, 0) = f(1, 0, 1) = 0$.

14. (0011 1101 0011 1100).

15. $\mathfrak{I} = \{\overline{x} \oplus \overline{y}, x \vee \overline{y}\}$.

16. $(A \setminus B) \oplus (A \setminus C) = A \cap (B \oplus C)$.

Вариант 17

1. $(A \setminus B) \setminus C = (A \setminus C) \setminus (B \setminus C)$;
   $A \subseteq B,\ C \subseteq D \Rightarrow A \times C \subseteq B \times D$.

2. $n(2n^2 - 3n + 1)$ кратно 6 для всех натуральных n.

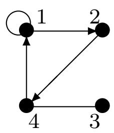
3. $2^\omega + n = 2^\omega$.

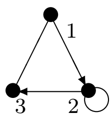
4. $P_1 = \{\langle a, 2\rangle, \langle a, 3\rangle, \langle a, 4\rangle, \langle c, 3\rangle, \langle c, 1\rangle, \langle c, 4\rangle\}$,
   $P_2 = \{\langle 1, 4\rangle, \langle 2, 3\rangle, \langle 2, 1\rangle, \langle 3, 4\rangle, \langle 4, 2\rangle\}$.

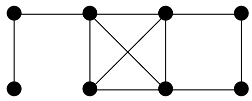
5. $P \subseteq \mathbb{Z}^2$, $\langle x, y\rangle \in P \Leftrightarrow 2x = 3y$.

6. $\langle \mathbb{R}; -, \cdot, :\rangle$.

7. $\mathfrak{B} = \langle \omega; +, \cdot\rangle$, $X = \{2\}$.

8. G_1: 

   G_2: 

9. G: 

10. $x \leftrightarrow (\overline{y} \to (y \oplus x))$, $x|(\overline{y} \vee \overline{z} \downarrow \overline{xy})$.

11. $x \oplus (y \leftrightarrow z)$ и $(x \oplus y) \leftrightarrow (x \oplus z)$.

12. $((x \downarrow y) \to z) \oplus y$.

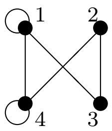
13. $f(0, 0, 1) = f(1, 0, 0) = f(1, 1, 0) = 0$.

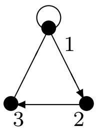
14. $(1011\ 1111\ 1011\ 1100)$.

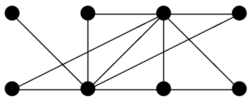
15. $\mathfrak{J} = \{x \wedge y, \overline{x} \to \overline{y}\}$.

16. $(A \setminus B) \cup (A \setminus C) = A \setminus (B \oplus C)$.

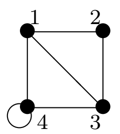
Вариант 18

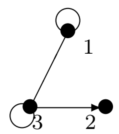
1. $A \oplus (B \oplus C) = (A \oplus B) \oplus C$,
   $(A \setminus B) \times C = (A \times C) \setminus (B \times C)$.
2. $\frac{1}{1\cdot 3} + \frac{1}{3\cdot 5} + \frac{1}{5\cdot 7} + \cdots + \frac{1}{(2n-1)(2n+1)} = \frac{n}{2n+1}$.
3. $|\mathbb{Z}^2| = \omega$.
4. $P_1 = \{\langle a,1\rangle, \langle a,2\rangle, \langle b,3\rangle, \langle b,4\rangle, \langle c,3\rangle, \langle c,4\rangle\}$,
   $P_2 = \{\langle 1,1\rangle, \langle 1,4\rangle, \langle 2,1\rangle, \langle 2,2\rangle, \langle 2,4\rangle, \langle 3,3\rangle\}$.
5. $P \subseteq \mathbb{Z}^2$, $\langle x, y\rangle \in P \Leftrightarrow x + y$ нечетно.
6. $\langle \mathbb{Q}; +, -, \sqrt{2}\rangle$.
7. $\mathfrak{B} = \langle \mathbb{R}; \sqrt[3]{}, 2\rangle$, $X = \{1\}$.
8. G_1: 

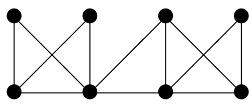
   G_2: 

9. G: 
10. $x \to (\overline{y}|(y \oplus x))$, $x \leftrightarrow (\overline{y} \vee \overline{z} \downarrow \overline{xy})$.
11. $x \oplus (y \to z)$ и $(x \oplus y) \to (x \oplus z)$.
12. $\overline{((x|y) \to z)} \oplus y$.
13. $f(0,0,1) = f(0,1,1) = f(1,1,1) = 0$.
14. $(0011\ 1110\ 0101\ 0101)$.
15. $\mathfrak{J} = \{x|y, \overline{x} \leftrightarrow \overline{y}\}$.
16. $(A \setminus B) \cup (B \setminus C) = (A \cup C) \setminus B$.

Вариант 19

1. $A \cap B = (\overline{A} \cup B) \cap A$,
   $(A \cap B) \times (C \cap D) = (A \times C) \cap (B \times D)$.
2. $n^5 - n$ кратно 5 для всех натуральных n.
3. $\omega \cdot n = \omega$.
4. $P_1 = \{\langle a, 2\rangle, \langle a, 3\rangle, \langle a, 4\rangle, \langle b, 1\rangle, \langle b, 2\rangle, \langle b, 4\rangle\}$,
   $P_2 = \{\langle 1, 1\rangle, \langle 1, 3\rangle, \langle 1, 4\rangle, \langle 2, 2\rangle, \langle 2, 3\rangle, \langle 3, 2\rangle, \langle 3, 3\rangle, \langle 4, 3\rangle,$
   $\langle 4, 4\rangle\}$.
5. $P \subseteq \mathbb{Z}^2$, $\langle x, y\rangle \in P \Leftrightarrow x - y$ четно.
6. $\langle \mathbb{R}^+; \sqrt{}, :, \cdot\rangle$, где $\mathbb{R}^+ = \{x \in \mathbb{R} \mid x > 0\}$.
7. $\mathfrak{B} = \langle \mathbb{Q} \setminus \{0\}; :\rangle$, $X = \{\frac{1}{2}, \frac{1}{4}\}$.
8. G_1: 

   G_2: 

9. G: 
10. $x \downarrow (\overline{y} \to (y \vee x))$, $x | (\overline{y} \leftrightarrow \overline{z} \oplus \overline{xy})$.
11. $x \oplus (y|z)$ и $(x \oplus y)|(x \oplus z)$.
12. $\overline{((x \downarrow y) \to \overline{z}) \oplus y}$.
13. $f(0, 0, 0) = f(0, 0, 1) = f(1, 1, 0) = 0$.
14. (0011 0011 1100 1111).
15. $\mathfrak{I} = \{\overline{x} \oplus y, \overline{x} \vee \overline{y}\}$.
16. $(A \cap B) \oplus (B \cup C) = (A \setminus B) \oplus C$.

Вариант 20

1. $A \cap (B \oplus C) = (A \cap B) \oplus (A \cap C)$,
   $(A \cap B) \times C = (A \times C) \cap (B \times C)$.

2. $6^{2n-1} + 1$ кратно 7 для всех $n \geqslant 1$.

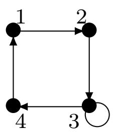
3. $|A \times B| = |B \times A|$.

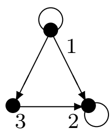
4. $P_1 = \{\langle a, 3\rangle, \langle b, 4\rangle, \langle b, 3\rangle, \langle b, 1\rangle, \langle b, 2\rangle, \langle c, 2\rangle\}$,
   $P_2 = \{\langle 1, 1\rangle, \langle 1, 3\rangle, \langle 2, 4\rangle, \langle 3, 1\rangle, \langle 3, 3\rangle, \langle 4, 2\rangle\}$.

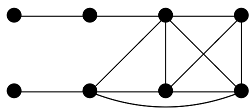
5. $P \subseteq \mathbb{Z}^2$, $\langle x, y\rangle \in P \Leftrightarrow 5x = 2y$.

6. $\langle \mathbb{Q}^+; +, \cdot, -1\rangle$, где $\mathbb{Q}^+ = \{x \in \mathbb{Q} | x > 0\}$.

7. $\mathfrak{B} = \langle \mathbb{Z}; +, -\rangle$, $X = \{3, 4\}$.

8. G_1: 

   G_2: 

9. G: 

10. $x \oplus (\overline{y} \to (y \leftrightarrow x))$, $x \downarrow (\overline{y} \vee \overline{z} | \overline{xy})$.

11. $x \downarrow (y \leftrightarrow z)$ и $(x \downarrow y) \leftrightarrow (x \downarrow z)$.

12. $(\overline{(x \downarrow y)} \to \overline{z}) \leftrightarrow y$.

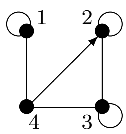
13. $f(0, 0, 0) = f(0, 1, 0) = f(1, 1, 1) = 0$.

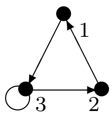
14. (1100 0101 0011 0011).

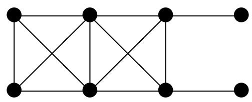
15. $\mathfrak{I} = \{x \wedge y, x \to \overline{y}\}$.

16. $(A \cup B) \setminus (A \cup C) = A \setminus (B \cup C)$.

Вариант 21

1. $A \oplus (A \oplus B) = B$,
   $A \times (B \cap C) = (A \times B) \cap (A \times C)$.
2. $1^3 + 2^3 + 3^3 + \ldots + n^3 = \frac{n^2(n+1)^2}{4}$.
3. $|\mathbb{Z} \times \omega| = \omega$.
4. $P_1 = \{\langle a, 3\rangle, \langle b, 4\rangle, \langle b, 3\rangle, \langle c, 1\rangle, \langle c, 2\rangle, \langle c, 4\rangle\}$,
   $P_2 = \{\langle 1, 2\rangle, \langle 1, 3\rangle, \langle 1, 4\rangle, \langle 2, 3\rangle, \langle 4, 3\rangle, \langle 4, 2\rangle\}$.
5. $P \subseteq \mathbb{Z}^2$, $\langle x, y\rangle \in P \Leftrightarrow x = -y$.
6. $\langle \mathbb{Z}^-; +, -\rangle$, где $\mathbb{Z}^- = \{x \in \mathbb{Z} \mid x < 0\}$.
7. $\mathfrak{B} = \langle \mathbb{R}^3; \times\rangle$, $X = \{\langle 1, 0, 0\rangle, \langle 0, 0, 1\rangle\}$, $\times$ — операция векторного произведения.
8. G_1: 

G_2: 

9. G: 
10. $(x \downarrow y)|(y \vee \overline{x})$, $(x \leftrightarrow \overline{y}) \oplus (z \to \overline{xy})$.
11. $x|(y \oplus z)$ и $(x|y) \oplus (x|z)$.
12. $\overline{((x \downarrow y) \to \overline{z}) \leftrightarrow y}$.
13. $f(0, 0, 0) = f(0, 0, 1) = f(1, 0, 0) = f(1, 1, 0) = 1$.
14. $(0010\ 0111\ 1010\ 1101)$.
15. $\mathfrak{J} = \{x \vee y, \overline{x} \leftrightarrow y\}$.
16. $(A \setminus B) \cup (B \setminus C) = (A \setminus B) \cup C$.

Вариант 22

1. $A \cup B = A \oplus B \oplus (A \cap B)$,
   $A \times (B \setminus C) = (A \times B) \setminus (A \times C)$.

2. $8^n - 1$ кратно 7 для всех натуральных $n \geqslant 1$.

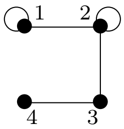
3. Множества точек двух окружностей эквивалентны.

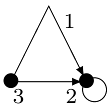
4. $P_1 = \{\langle a, 1\rangle, \langle b, 2\rangle, \langle b, 3\rangle, \langle c, 1\rangle, \langle c, 3\rangle, \langle c, 4\rangle\}$,
   $P_2 = \{\langle 1, 1\rangle, \langle 1, 2\rangle, \langle 1, 3\rangle, \langle 2, 2\rangle, \langle 2, 3\rangle, \langle 3, 3\rangle, \langle 3, 4\rangle, \langle 4, 1\rangle,$
   $\langle 4, 4\rangle\}$.

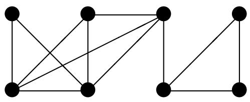
5. $P \subseteq \mathbb{Z}^2$, $\langle x, y\rangle \in P \Leftrightarrow x + 1 = y$.

6. $\langle \mathbb{Z}^-; +, \cdot\rangle$, где $\mathbb{Z}^- = \{x \in \mathbb{Z} \mid x < 0\}$.

7. $\mathfrak{B} = \langle \mathbb{Z}; +, \cdot\rangle$, $X = \{-2, 7\}$.

8. G_1: 

   G_2: 

9. G: 

10. $(x|y) \to (y \oplus \overline{x})$, $(x \wedge \overline{y}) \vee (z \leftrightarrow \overline{x \downarrow y})$.

11. $x \to (y|z)$ и $(x \to y)|(x \to z)$.

12. $(\overline{(x \downarrow y)} \to \overline{z}) \oplus y$.

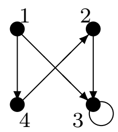
13. $f(1,0,1) = f(0,1,1) = f(0,1,0) = 0$.

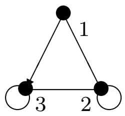
14. (0011 1111 0011 1100).

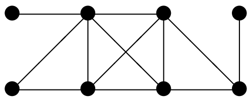
15. $\mathfrak{J} = \{x \oplus y, x \vee \overline{y}\}$.

16. $(A \setminus B) \cup (A \cap C) = A \setminus (B \cup C)$.

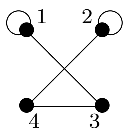
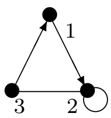
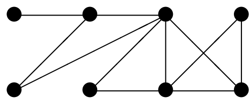
Вариант 23

1. $A \setminus B = A \oplus (A \cap B)$, $(A \cup B) \times C = (A \times C) \cup (B \times C)$.
2. $1^2 + 3^2 + 5^2 + \ldots + (2n-1)^2 = \frac{n(2n-1)(2n+1)}{3}$.
3. $(A \times B)^C \sim A^C \times B^C$.
4. $P_1 = \{\langle a,2\rangle, \langle a,4\rangle, \langle a,3\rangle, \langle c,1\rangle, \langle c,2\rangle, \langle c,3\rangle\}$,
   $P_2 = \{\langle 1,1\rangle, \langle 1,4\rangle, \langle 2,3\rangle, \langle 3,3\rangle, \langle 4,1\rangle, \langle 4,3\rangle, \langle 4,4\rangle\}$.
5. $P \subseteq \mathbb{Z}^2$, $\langle x,y\rangle \in P \Leftrightarrow y \geqslant x-2$.
6. $\langle\{A \in M_n(\mathbb{Z}) | \det A \neq 0\}; +, \cdot\rangle$.
7. $\mathfrak{B} = \langle \mathbb{R}^3; +\rangle$, $X = \{\langle 1,2,3\rangle, \langle -1,0,0\rangle\}$.
8. G_1: 

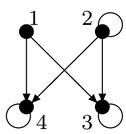
   G_2: 

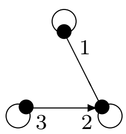
9. G: 
10. $(x \vee y) \to (y \downarrow \overline{x})$, $(x|\overline{y}) \leftrightarrow (z \oplus \overline{xy})$.
11. $x \to (y \leftrightarrow z)$ и $(x \to y) \leftrightarrow (x \to z)$.
12. $\overline{(x \vee y) \to (\overline{z} \leftrightarrow y)}$.
13. $f(1,0,0) = f(0,1,1) = f(0,1,0) = 0$.
14. $(0101\ 0011\ 1100\ 0011)$.
15. $\mathfrak{J} = \{x \wedge \overline{y}, \overline{x} \to \overline{y}\}$.
16. $(A \oplus B) \setminus (B \cap C) = A \oplus (B \setminus C)$.

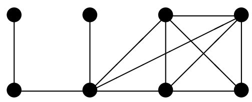
Вариант 24

1. $A \cup B = (A \oplus B) \cup (A \cap B)$, $A \times (B \cup C) = (A \times B) \cup (A \times C)$.
2. $4^n + 6n - 1$ кратно 9 для всех натуральных $n > 0$.
3. $(A^B)^C \sim A^{B \times C}$.
4. $P_1 = \{\langle a, 2\rangle, \langle a, 4\rangle, \langle b, 1\rangle, \langle b, 2\rangle, \langle b, 4\rangle, \langle c, 2\rangle, \langle c, 4\rangle\}$,
   $P_2 = \{\langle 1, 1\rangle, \langle 2, 2\rangle, \langle 2, 4\rangle, \langle 3, 3\rangle, \langle 4, 4\rangle, \langle 3, 2\rangle, \langle 1, 3\rangle, \langle 4, 1\rangle\}$.
5. $P \subseteq (\mathbb{Z}^+)^2$, $\langle x, y\rangle \in P \Leftrightarrow$ НОД$(x, y) \neq 1$,
   где $\mathbb{Z}^+ = \{x \in \mathbb{Z} \mid x > 0\}$.
6. $\langle \{A \in M_2(\mathbb{Z}) |\det A \neq 0\}; \cdot, \left(\begin{smallmatrix} 1 & 1 \\ -1 & -1 \end{smallmatrix}\right)\rangle$.
7. $\mathfrak{B} = \langle \mathbb{Q} \setminus \{0\}; \cdot, :\rangle$, $X = \{-5\}$.
8. G_1:  G_2: 
9. G: 
10. $(x \vee y) \downarrow (y \to \overline{x})$, $(x \oplus \overline{y}) \to (z|\overline{xy})$.
11. $x \vee (y \oplus z)$ и $(x \vee y) \oplus (x \vee z)$.
12. $\overline{(x|y) \oplus (\overline{z} \to y)}$.
13. $f(0, 0, 1) = f(0, 1, 1) = f(1, 0, 0) = f(1, 0, 1) = 1$.
14. (0111 1101 0010 1010).
15. $\mathfrak{J} = \{x \downarrow \overline{y}, \overline{x} \leftrightarrow \overline{y}\}$.
16. $(A \cup B) \setminus (A \cup C) = A \oplus (B \cup C)$.

Вариант 25

1. $\overline{\overline{A} \cup \overline{B}} = A \cap B$;
   $A \subseteq C$, $B \subseteq D \Rightarrow A \times B = (A \times D) \cap (C \times B)$.
2. $\frac{1}{2} - \frac{2}{2^2} + \frac{3}{2^3} - \frac{4}{2^4} + \cdots + (-1)^{n+1}\frac{n}{2^n} = \frac{1}{9}\left(2 + (-1)^{n-1}\frac{3n+2}{2^n}\right)$.
3. Множества точек двух квадратов эквивалентны.
4. $P_1 = \{\langle b, 1\rangle, \langle a, 3\rangle, \langle a, 4\rangle, \langle c, 2\rangle, \langle c, 4\rangle, \langle b, 4\rangle\}$,
   $P_2 = \{\langle 1, 1\rangle, \langle 2, 3\rangle, \langle 2, 2\rangle, \langle 2, 4\rangle, \langle 3, 3\rangle, \langle 3, 4\rangle, \langle 4, 2\rangle, \langle 4, 4\rangle\}$.
5. $P \subseteq (\mathbb{Z}^+)^2$, $\langle x, y\rangle \in P \Leftrightarrow x \neq y$.
6. $\langle \mathbb{C} \setminus \{0\}; -, +, :, \sqrt{\ }\rangle$.
7. $\mathfrak{B} = \langle \mathbb{C}; +, -, 1\rangle$, $X = \{2i\}$.
8. G_1: 

   G_2: 

9. G: 
10. $(x \oplus y)|(y \downarrow \overline{x})$, $(x \leftrightarrow \overline{y}) \to (z \vee \overline{xy})$.
11. $x \downarrow (y \oplus z)$ и $(x \downarrow y) \oplus (x \downarrow z)$.
12. $\overline{((x \downarrow y) \to z) \leftrightarrow x}$.
13. $f(1,0,0) = f(0,0,1) = f(0,1,1) = 0$.
14. (1111 1100 0011 0011).
15. $\mathfrak{I} = \{x \oplus \overline{y}, x \vee y\}$.
16. $(A \cap B) \oplus (A \cup C) = A \oplus (B \cup C)$.